

Caminhos Mínimos em Transporte*

APRESENTAÇÃO

Carlos Ernesto da Silva Lindgren

UFRJ — COPPE

O trabalho se divide em seis segmentos ou capítulos.

A introdução (capítulo 1) apresenta breve exame do conceito de caminho mínimo e estabelece o isomorfismo que constitui a base para o desenvolvimento do trabalho. Este exame é objetivo, simples e direto, sem preâmbulos, considerações e discussões de conceitos e seus antecedentes. Nos seus tópicos aparecem o que chamamos de lembretes de princípios de ótica elementar ginásiana. O último desses tópicos enuncia o problema que se torna objeto de análise dos demais capítulos.

O capítulo 2, a título de exemplificação, se constitui da construção da rede de caminhos mínimos traçados sobre o território nacional, a partir de Brasília, utilizando a conceituação e a analogia introduzidas. Ilustra e visualiza o problema em discussão, destacando-se a necessidade da criação de método ou métodos que permitam a generalização de tal problema.

Os capítulos 3, 4 e 5 apresentam, em destaque, três métodos que visualizam a generalização desejada. O destaque é feito de forma a permitir que cada método seja analisado distintamente pelos seus méritos e facilidade de provável

* Tese submetida ao corpo docente da Coordenação dos Programas de Pós-graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro — COPPE como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de doutor em ciência.

expressão em linguagem de computação eletrônica.

A conclusão, em se constituindo do capítulo VI, sugere que métodos mais sofisticados talvez sejam viáveis, dado a existência de conhecimento que permite o tratamento do mesmo problema onde se definem espaços taxonômicos de dimensões compatíveis com o número de variáveis consideradas. Apon-ta, entretanto, limitações presentes que exigiriam pesquisas complementares no estudo de propriedades dos espaços taxonômicos n-dimensionais.

Duas observações significativas: o corpo principal da tese — capítulos 1 a 5 — contém poucas referências bibliográficas. Justificamos: os princípios e conceitos de ótica geométrica e as propriedades de geometria euclidiana especificados são de natureza elementar, não constituindo, pois, matéria que exija referência à bibliografia. Além disso, não há embasamento teórico específico que pudesse ser mencionado como suporte para o que se apresenta. Algumas idéias básicas são adiantadas em trabalho de Warntz (1965), com posterior discussão por Lindgren (1967 e 1969). No trabalho de Warntz é que se encontra a primeira sugestão para a analogia do índice de refração em um meio de propagação de raios luminosos e o valor da terra no meio ambiente físico onde se identificaria o caminho de mínimo custo ligando dois pontos. Os trabalhos de Lindgren procuram generalizar a proposta de Warntz e, assim, este conjunto de informações se constitui na base em que se fundamenta a presente dissertação.

O problema foi proposto para o autor por William Warntz (atualmente na Western University of Ontario) e William Bunge (Wayne State University) em junho de 1965, quando era pesquisador visitante na Universidade de Prince-

ton. Os dois geógrafos-matemáticos faziam parte de um grupo (Community of Mathematical Geographers, sediada na Universidade de Michigan, Ann Arbor) do qual faziam parte, entre outros, Waldo Tobler e Frank Rens que, naquela ocasião, lançavam os primeiros fundamentos da computação gráfica (*computer graphics*) aplicada à geografia e, de forma mais abrangente, ao planejamento.

Segundo Bunge, a solução do problema se considerava como básica a fim de viabilizar, por exemplo, o teste da teoria das localidades centrais de Christaller em que se procurava “achatar e endireitar o espaço” (*space flattening and straightning*) para que se pudesse, sobre o espaço assim transformado, superpor a malha hexagonal regular proposta pela teoria. É a partir das tentativas então feitas que se originam as inúmeras transformações do espaço taxonômico desenvolvidas por Tobler. Em paralelo, Michael Dacey propõe seus modelos físicos com o objetivo de explicar a organização econômica, central para o modelo de Christaller.

É dentro, pois, daquele contexto mais amplo, que marca o início do desenvolvimento de uma vasta coleção de métodos e técnicas em computação gráfica, que se situa o tema desta tese.

Uma vez proposto, em meados de 1966, foi submetida a Warntz e Bunge o primeiro esboço de solução que, dado as condições de geração das informações, fazia uso de construções gráficas. Dizia-se que a principal justificativa para o desenvolvimento da computação gráfica era o fato de se necessitar dispor de técnicas que permitissem a manipulação de problemas em que a matemática das configurações espaciais eram de difícil dedução. No caso do problema do *space flattening and straightning* que se identifica como pertencente à

classe daquelas que exigem a determinação de caminhos mínimos, esta problemática se configura claramente.

Daí, portanto, se ter feito uso de métodos geométricos ao se propor a solução da questão.

Em 1967, quando a primeira solução foi discutida na Universidade de Harvard, abriu-se uma perspectiva para a análise de vários outros problemas. Por exemplo, a deformação do espaço real caracterizado por uma representação em espaço taxonômico multidimensional se tornou viável. Isto foi possível dado que se associou a solução do problema ao método de representação de configurações reais em espaços multidimensionais que havia sido desenvolvido em Princeton por este autor.

Na escolha do tema para esta tese, portanto, se identificam uma série de fatores que sugerem sua significância para a área de computação gráfica, pelo menos em termos de elaboração das etapas a serem programadas ao mesmo tempo que viabiliza a percepção de configurações espaciais concebidas e representadas em espaços taxonômicos multidimensionais.

Acompanharam os esforços iniciais, entre 1965 e 1971, William Warntz, William Bunge, Waldo Tobler, Frank Rens, Oscar Fish, Michael Woldenberg, Carl Steinitz, Eric Teicholz e Allan Schmidt a quem estendo os meus agradecimentos.

1 — INTRODUÇÃO

1.1 — Caminhos mínimos

Considere-se a propriedade de formas geométricas em espaço euclidiano. No plano, espaço bidimensional, o caminho mínimo entre dois pontos é o segmento de

linha reta definida pelos dois pontos; em uma superfície, espaço bidimensional, mas que por condições de sua geometria intrínseca encontra-se imerso em um espaço tridimensional, o caminho mínimo é a geodésica definida pelos dois pontos.

Estes caminhos mínimos, determinados por condições de propriedades do espaço geométrico onde são traçados, se alteram, entretanto, no momento em que se pressupõe que a forma geométrica se acha associada a propriedades físicas do espaço euclidiano onde se encontra inserida. É o caso, por exemplo, de se considerar um plano que interseccione o plano de separação de dois espaços tridimensionais de índice de refração distintos, I_1 e I_2 (figura 1).

No plano α , o caminho mínimo entre os pontos A e B percorrido por um raio luminoso pertencente ao plano, que tivesse origem em A e se dirigisse a B, sofre, de acordo com as leis da ótica, um desvio ao encontrar o plano β de separação dos espaços (meios) de índice de refração diversos. O caminho mínimo seria, então, definido por ACB_1 e não por ACB (segmentos de linha reta $AC + CB$).

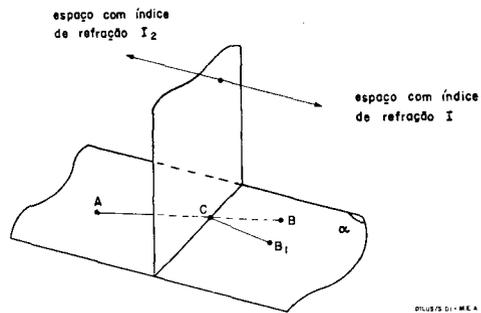


Figura 1

A pressuposição que se faz a fim de sugerir uma aplicação desta propriedade em planejamento urbano e regional e, especificamente,

em transportes, é o de se identificar propriedade do meio urbano que se consideraria análoga com propriedade do meio ambiente ótico.

Uma propriedade do meio urbano assim identificada é o valor da terra. Da mesma forma que se pode pressupor uma variação em todas as direções a partir de um ponto do índice de refração do meio ótico, pode-se pressupor uma variação em todas as direções a partir de um ponto do valor da terra no meio urbano.

É evidente que o pressuposto acima considera uma variação de Δc de custo de terra para cada Δd de distância percorrida a partir de um ponto qualquer. Mas este pressuposto de há muito tem sido aceito como válido nas várias tentativas de relacionar valor da terra com distância ou renda econômica com distância. Diz-se que a cada posição geográfica corresponde um valor de terra e o único impedimento a considerar como válido ao pressuposto feito é de que esta posição geográfica corresponde, na verdade, a um ponto que representa uma área de lote, o que nos leva a referência do valor do lote e não do valor associado ao ponto. O pressuposto aqui introduzido requer apenas que se considere um lote de área tão pequena quanto se deseja fazer, isto é, infinitesimal, de forma que esta área se identifique com o próprio ponto que a representa. Neste caso, se estaria referindo, de fato, ao valor de terra associado a um ponto que representa uma área infinitesimal.

Se assim é, seria válido dizer-se haver uma variação de valor de terra a partir deste ponto (área infinitesimal) em qualquer direção.

Considere-se, então, valor de terra e índice de refração análogos. Indagar-se-ia qual o caminho mínimo a percorrer a partir de um ponto A até se atingir um ponto B de forma que esta minimização de

caminho resultasse em dispêndio mínimo de aquisição de terra na união dos dois pontos.

No meio ótico, o caminho mínimo fornece uma distância mínima; no meio urbano, o caminho forneceria a distância associada ao custo mínimo da terra adquirida e não, necessariamente, à distância mínima física que, como já se examinou, corresponde ao traçado ou de segmentos de linha reta ou de segmentos de linha geodésica.

1.2 — Construção do caminho

O diagrama de Huygens fundamentado nas leis da refração em meios óticos de diversos índices de refração é bastante conhecido (figura 2). O raio luminoso com origem em A sofre uma refração ao passar do meio de índice de refração I_1 para o meio de índice I_2 e assim sucessivamente. Ao considerarmos que A é um foco luminoso do qual emanam vários raios, o efeito é dado pela figura 2. Os pontos de encontro de cada raio

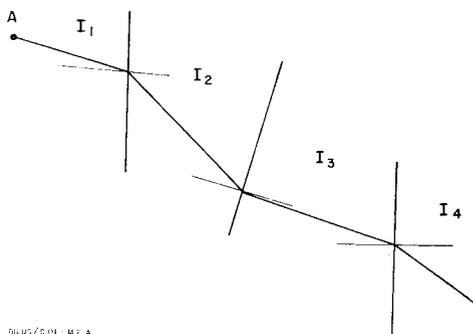


Figura 2

situado no meio de índice I_1 com o meio de índice I_2 , gera uma curva. Cada ponto de encontro é agora considerado como nova fonte luminosa e os pontos de encontro de cada estrela de raios com o meio de índice I é uma nova

curva envelope. E assim sucessivamente. Se traçamos o envelope das curvas envelopes traçadas em torno de cada ponto teremos, necessariamente, a separação entre os meios de índice de refração distintos (figura 3).

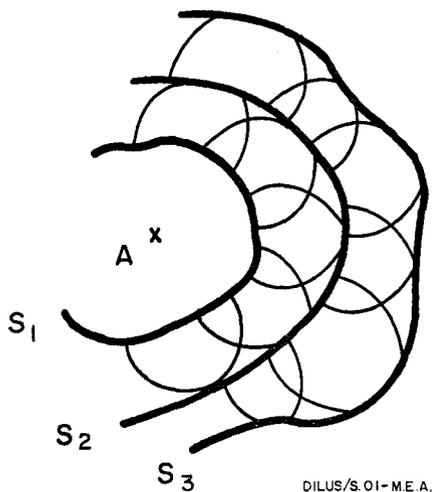


Figura 3

Supondo-se, então, que se tenha o ponto A, se deseja conhecer o caminho percorrido pelo raio que parte de A e atinge N. De acordo com o diagrama de Huygens, o procedimento deve ser iniciado em N, traçando perpendiculares às curvas S_n, S_3, S_2, S_1 e daí ao ponto A, considerando-se que A está imerso no meio de índice de refração I_1 (figura 4).

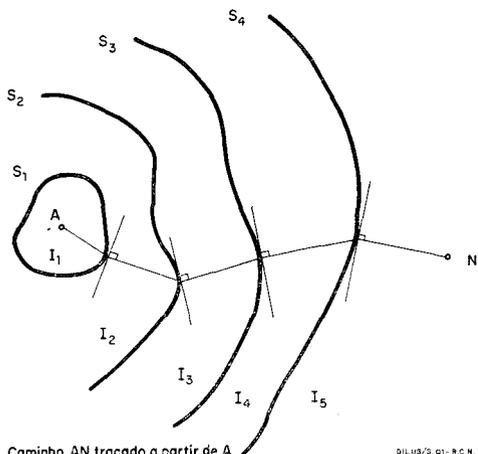


Figura 4

O diagrama de Huygens pode ser construído a partir de N, por exemplo, obtendo-se como resultado uma série de curvas S' que tangenciarão as originadas com o traçado a partir de A, nos pontos onde o caminho AN encontra S_1, S_2, S_3, S_n (figura 5).

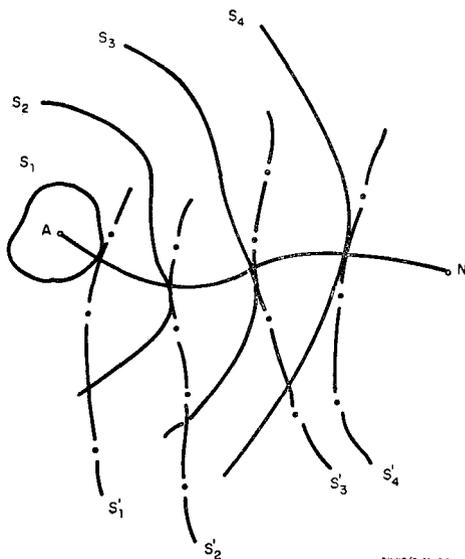


Figura 5

Os dois grupos de curvas são tangentes naqueles pontos, obtendo-se o mesmo caminho ótico se o percorrermos de A na direção de N ou se o percorrermos de N na direção de A.

1.3 — A analogia

Considere-se o índice de refração e o valor da terra análogos. Para a construção do diagrama de "custo mínimo de aquisição de terra" para percorrer o caminho de um ponto A a um ponto M, certos pressupostos devem ser feitos.

Por exemplo, podemos supor que 4 ha de terra são necessários para a construção de um quilômetro de caminho (estrada). Além disso, em cada ponto, dispõe-se de 10 mil cruzeiros para a aquisição de terra.

Então, se c_i é o custo da terra em um ponto i , a distância máxima alcançada a partir de i é dada por $r_i = 10000/4c_i^*$, com r_i em quilômetros. Como c_i varia de ponto a ponto, em todas as direções, partindo de A teríamos as curvas S_k análogos às do diagrama de Huygens (figura 6).

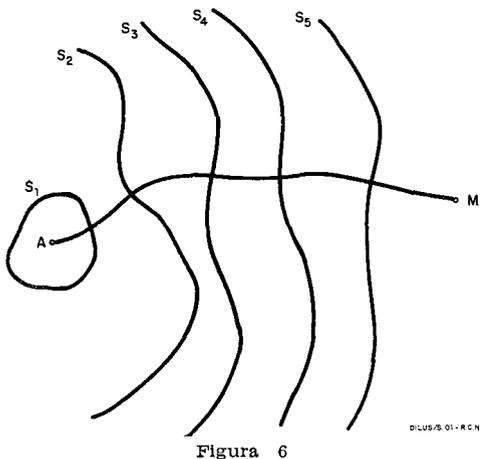


Figura 6

AM será o caminho mínimo percorrido entre A e M com um dispêndio mínimo de recursos financeiros na aquisição de terra, sob os pressupostos acima, isto é, 4 ha de terra para cada quilômetro e 10 mil cruzeiros de recursos em cada ponto.

Como no diagrama de Huygens, o mesmo caminho é obtido partindo-se de M na direção de A (figura 7).

1.4 — Generalização e o enunciado do problema

Duas generalizações são factíveis. A primeira se refere ao traçado dos caminhos mínimos pro-

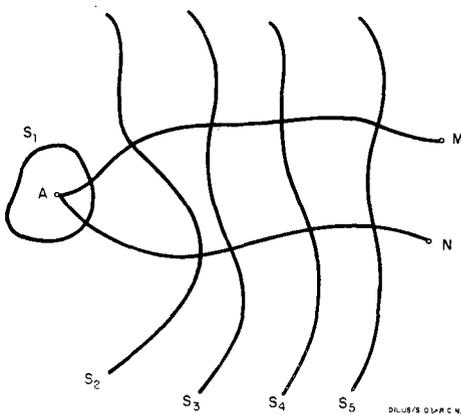


Figura 7

priamente ditos e que é analisada a seguir. A segunda trata da generalização da determinação do comprimento das distâncias análogas aos comprimentos dos raios óticos (ver figuras 1 e 2).

Considere que as curvas S a partir de A tenham sido traçadas. É possível determinar, como já descrito, o caminho de A a qualquer outro ponto. Na figura 7 temos os caminhos AM e AN traçados a partir de M e N na direção de A .

Os mesmos caminhos são obtidos caso se tenham as curvas S construídas a partir de M e N (figura 8).

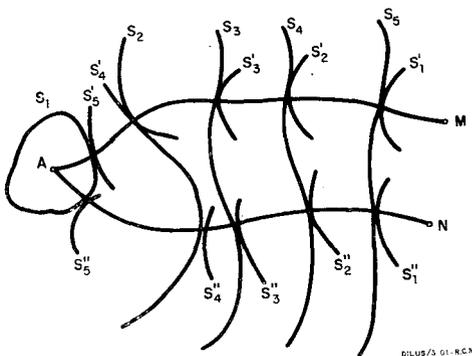


Figura 8

* É evidente que se obteria diferente valor para r_i , alterando-se a área necessária para a construção de um quilômetro de estrada ou o total de recurso disponível em cada ponto. O caminho mínimo, entretanto, é único, já que depende de c_i , constante, isomórfico com o índice de refração.

Embora as curvas $S_1, S_2, S_3,$ e S_4 sejam tangentes às curvas $S_1', S_2', S_3',$ correspondentes a M e $S_1'', S_2'', S_3'', S_4'',$ correspondentes a N, a propriedade de tangência das curvas correspondendo a M e N não se verifica. Isto, naturalmente, impede que se trace imediatamente o caminho mínimo que une M e N.

Como, porém, toda a informação para o traçado de MN já se acha configurado pelas construções feitas, a determinação do caminho MN exige que se identifique qual o grupo de pontos situados nas curvas S, S' e S'' definem o conjunto de curvas em torno de M e N que satisfaçam a condição de tangência (figura 9).

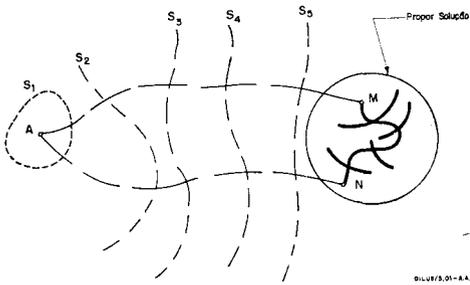


Figura 9

Dever-se-á, assim, proceder a uma análise das propriedades destes conjuntos de curvas de forma a tornar possível o traçado dos caminhos mínimos entre dois pontos, uma vez configurada a informação a partir de um ponto qualquer A.

Problema: dada a informação a partir de A, determinar o caminho MN.

A solução procurada para o problema proposto generaliza a questão da determinação dos caminhos mínimos. Verifica-se, porém, que, até o momento, toda a analogia se resumia no comprimento do raio ótico e no comprimento do caminho mínimo dentro de um meio ambiente de índice de refração (ou

custo da terra) constante. O planejador, entretanto, percebe que este caminho mínimo é determinado por uma série de outras variáveis, além do custo da terra. Propomos, então, que o índice de refração seja feito análogo a uma variável que expresse ou represente, proporcionalmente, o conjunto de variáveis que simultaneamente influenciam a posição do caminho mínimo. Para isto sugerimos o uso da composição taxonômica, bastante conhecida e descrita em Abler, Adams, Gould (1971), em Lindgren (1976) e Petterle (1976), por exemplo, e cuja expressão é

$$r_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + \dots + n_i^2}$$

onde a_i, b_i, \dots, n_i são os valores dos fatores que influenciam, no ponto i, o comprimento do caminho mínimo que por ele passa. Desta forma, soluciona-se simplesmente esta consideração de influências múltiplas, ao mesmo tempo que se percebe que o número e o tipo de fatores influentes no ponto i não precisam ser, necessariamente, os mesmos que os influentes em um ponto j, particularmente se a, b, ..., n são adimensionais, o que se tem através da construção de indicadores relativos dos fatores de mesma proporção. Isto se consegue, por exemplo, através do índice de Shevky-Williams-Bell (Lindgren, 1976), ou com o cálculo dos *scores* de uma análise fatorial. Por se tratar de indicadores e/ou técnicas de amplo uso, não procede se conduzir análise da propriedade da sugestão feita com o objetivo de se demonstrar sua validade.

2 — CAMINHOS MÍNIMOS ORIGINADOS EM BRASÍLIA

A figura 10 mostra os caminhos mínimos que partem de Brasília e alcançam algumas das capitais es-

taduais. A construção é imprecisa e serve apenas como ilustração de uma aplicação da analogia proposta. As isolinhas correspondem às ondas luminosas caso se estivesse considerando Brasília como um foco luminoso.

O traçado se inicia a partir do conhecimento de três dados básicos. Primeiro, o valor da terra em cada ponto da superfície. No caso, tomou-se a informação indicadora deste valor, o valor total da área de uma microrregião que, dividida

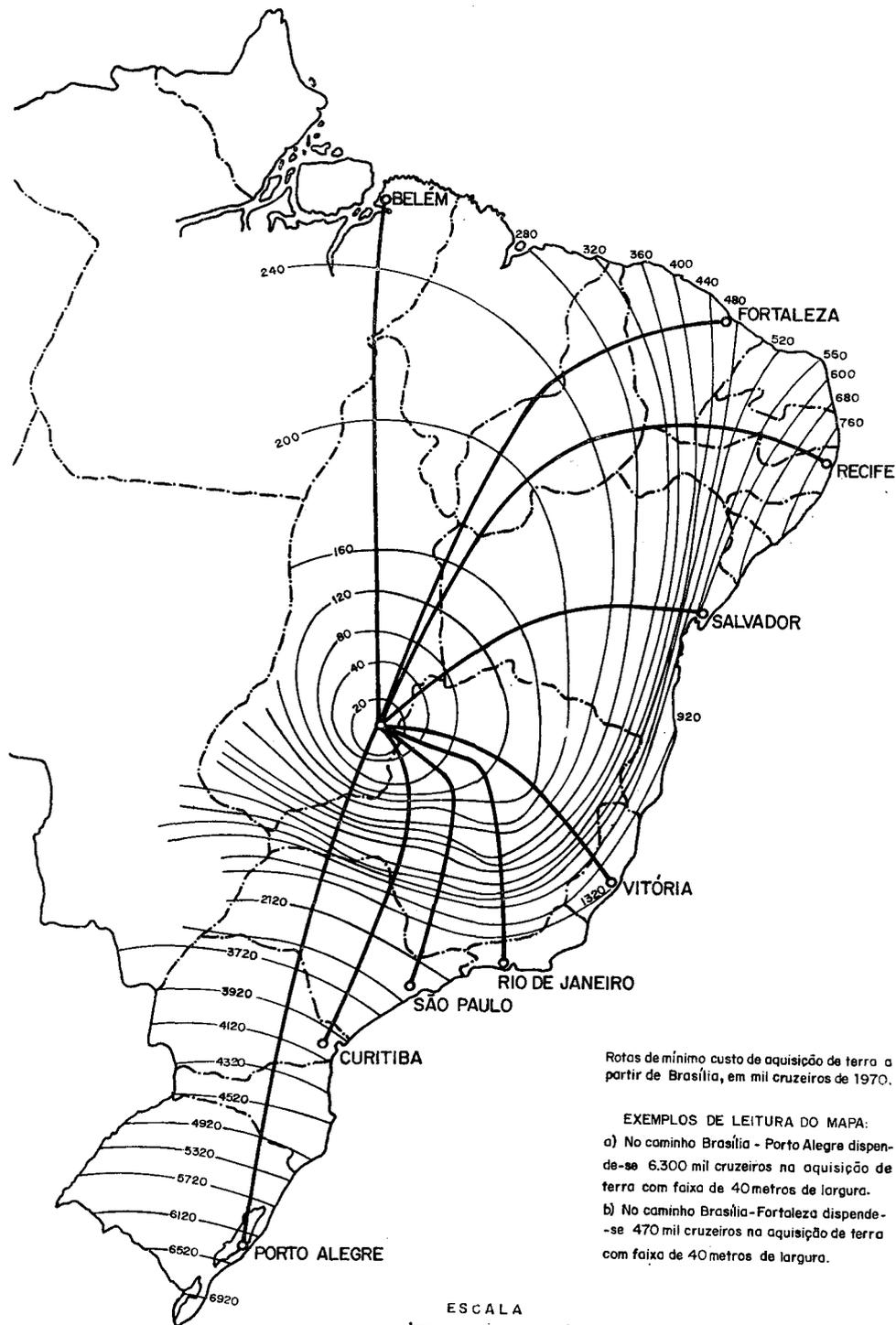


Figura 10

por sua área, nos fornece um valor unitário por hectare. A segunda informação se refere à área total necessária para a construção de uma faixa de rodovia com 40 metros de largura e mil metros de comprimento, ou seja, 4 ha para cada quilômetro de estrada. A terceira informação é o total de recurso disponível em cada ponto para aquisição de terra. O comprimento de faixa de estrada que se obtém a partir do ponto é, então, $r_i = 10000/4c_i$, em quilômetros, onde c_i é o valor unitário por hectare, em cruzeiros de 1970.

Iniciemos a construção com centro no ponto geográfico Brasília, obtendo-se a primeira envoltória. Sobre esta, identificada a posição de cada um de seus pontos geográficos, construímos arcos de círculo cujos raios variam de acordo com c_i , isto é, de acordo com a sua posição geográfica. O valor de c_i no ponto é o valor unitário por hectare correspondente a microrregião a qual o ponto pertence. Obtemos a segunda envoltória, tangente aos arcos de círculo traçados. A construção é repetida até se cobrir todo o território nacional.

A construção do caminho mínimo se inicia no ponto de destino. Por exemplo, traçamos o caminho Brasília—Recife a partir de Recife, pois que o segmento do caminho compreendido entre Recife e a isolinha mais próxima a Recife é perpendicular à isolinha. Referimo-nos à figura 4 no capítulo I que corresponde à construção de acordo com leis da ótica geométrica ou, se quisermos, ao teorema de Malus, ao princípio de Fermat ou ao princípio de Huygens, proposições que tem significados equivalentes. Segundo elas, há uma importante propriedade que passamos a examinar.

Sejam S_1 e S_2 duas superfícies de onda, inseridas em meios de índice de refração n_1 e n_2 , meios estes separados pela superfície MN.

A figura 11 mostra o traço destas superfícies no plano do papel.

Os raios AB e EF são normais a S_1 e os raios refratados BC e FG são normais a S_2 . Pelas proposições

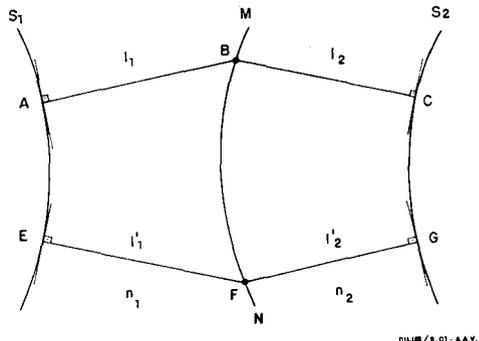


Figura 11

da ótica, temos $l_1 n_1 + l_2 n_2 = l'_1 n_1 + l'_2 n_2$ que é o comprimento do caminho ótico mínimo percorrido pela luz para ir da superfície S_1 a superfície S_2 . Os tempos que a luz emprega para seguir os caminhos ABC e EFG são iguais.

No caso presente, pressupomos que S_1 e S_2 são superfícies de refração e assim temos, na figura 12, o caminho ótico mínimo percorrido pelo raio luminoso para ir da superfície S_1 a superfície S_3 .

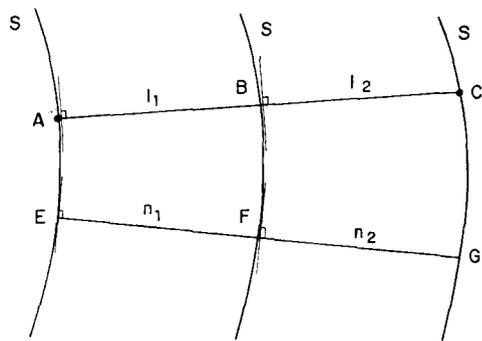


Figura 12

Tem-se, ainda, $l_1 n_1 + l_2 n_2 = l'_1 n_1 + l'_2 n_2$. Pela analogia proposta, l_i corresponde a r_i e n_2 a c_i ,

isto é, distância alcançada com um recurso constante em todos os pontos onde o valor da terra é c_i .

Tomemos dois pontos para os quais correspondem r_1 , r_2 , c_1 e c_2 , para um recurso constante R.

$R_1 = R/c_1$ e $r_2 = R/c_2$ para uma faixa unitária de rodovia. Consequentemente $r_1c_1 = r_2c_2 = R$, importante verificação para a interpretação da figura 10. Esta interpretação é, então, a seguinte:

Entre duas isolinhas consecutivas o total de recursos investidos na aquisição de terra entre dois pontos localizados nas isolinhas é constante.

Reportando-nos a figura 11, concluímos que o total de recursos na aquisição de terra para se ir de A a B é igual ao total de recursos na aquisição de terra para se ir de E a F. Idem, para se cobrir as distâncias BC e FG, de forma que o total de recursos dispendidos no percurso ABC é igual ao total de recursos dispendidos no percurso EFG.

Nada há, realmente, de extraordinário nesta conclusão. É uma consequência do traçado que se fundamentou nas leis da ótica geométrica. O leitor, porém, deverá refletir que quaisquer caminhos, na figura 10, a partir de Brasília e que cruzem o mesmo número de isolinhas implicam o mesmo dispêndio de recursos, independente do comprimento do percurso. Disto resulta a consequência de que a velocidade da luz é feita isomórfica com recursos disponíveis e mais o fato de que o que se representa na figura 10 são os *caminhos de custo mínimo*.

Dado estas observações que consideramos extremamente importantes e significativas para o planejamento de transportes, na medida em que c_i pode ser considerado como um valor que representa a combinação localizada de

uma série de fatores que influenciam o posicionamento de uma via, percebe-se a necessidade de examinar métodos que permitam encontrar a posição do caminho de custo mínimo entre duas localidades quaisquer. De acordo com os princípios até agora utilizados, a construção das isolinhas a partir de dado ponto deveria ser feita a fim de se tornar possível o encontro da posição dos caminhos que dele partem.

Esta generalização é tratada nos capítulos seguintes.

3 — CAMINHO DE MÍNIMO CUSTO: PRIMEIRA PROPOSTA DE GENERALIZAÇÃO

3.1 — Preliminares

Consideremos na figura 13 os pontos A, B, C e D. Pressupomos que as isolinhas relativas a A e B (S_A e S_B , respectivamente) sejam conhecidas, sendo duas delas, uma para cada ponto, indicadas. De acordo com a analogia discutida, o caminho mínimo de A e B para qualquer outro ponto pode ser determinado. Na figura temos indicado os caminhos AB, AC, AD relativos a A e BA, BC, BD relativos a B. Já foi examinado que $AB \equiv BA$. O problema da generalização é a determinação do caminho mínimo entre C e D, isto é, $CD \equiv DC$.

Um exame preliminar mostra que os caminhos que se originam em A cortam as isolinhas relativas a este ponto, em pontos O_i . O mesmo ocorre com os caminhos originados em B, que cortam suas isolinhas em pontos P_i . Os caminhos e as isolinhas são perpendiculares no ponto de contato.

Para todos os caminhos originados em A e todos os originados em B, existe um e apenas um caminho

ao longo do qual o ponto O_i coincide com o ponto P_i . Neste ponto, identificado como $O \equiv P$ na figura 13, as isolinhas admitem uma tangente comum.

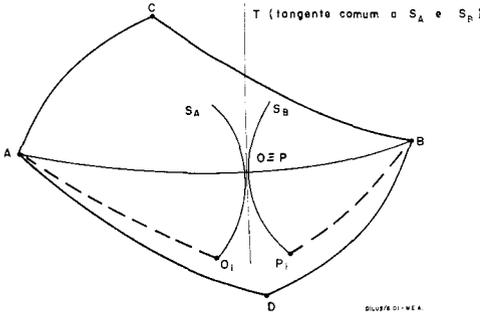


Figura 13

Admitamos que todos os caminhos originados em C e D sejam conhecidos; podemos conceber que o caminho AB é obtido de forma a ter propriedades de duas superfícies, individualmente geradas ao longo de todos os caminhos de C e de todos os caminhos de D. Há neste pressuposto a implicação de que, de alguma forma, o caminho AB está relacionado com a interseção destas duas superfícies. Pictorialmente expressamos este pressuposto na figura 14.

Justifiquemos este fato com um exemplo de como estas duas superfícies podem ser geradas e como sua interseção pode ser relacionada ao caminho AB.

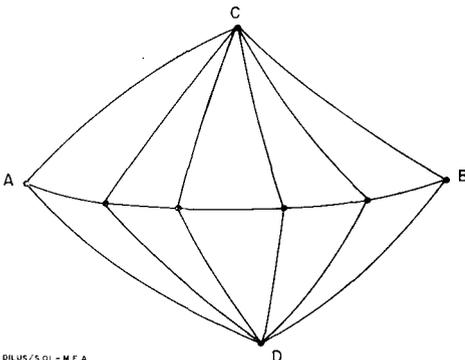


Figura 14

A figura 15 mostra um caminho originado em C até um ponto N de AB, um caminho originado em D até o mesmo ponto e algumas isolinhas relativas a C e D. Para nossos propósitos, suponhamos que CND é um caminho mínimo.

No ponto S_1 o caminho mínimo tem certa curvatura C_1 ; no ponto S_2 , uma curvatura C_2 . Se consideramos o caminho CR e um caminho DR e marcamos suas interações com as isolinhas tangentes em S_2 , pode-se concluir que as curvaturas nestes pontos, R_1 e R_2 , são distintas. Pressupondo que o ponto R se aproxima de S_1 , as curvaturas variam até se igualarem em valor no ponto S_1 .

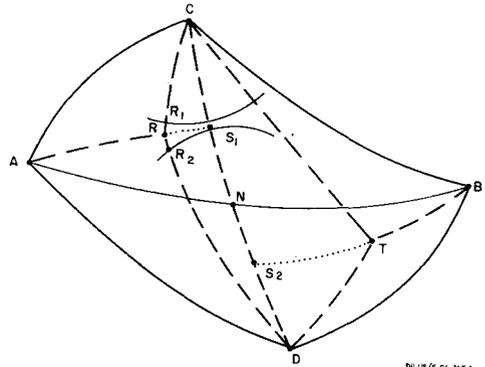


Figura 15

Movendo o ponto R ao longo do caminho AR na direção de A, cobrimos todos os caminhos originados em C e em D e terminando em um ponto de AR.

Considerações similares podem ser feitas tomando-se o ponto T que se move na direção de B ao longo do caminho BT e pressupondo que os pontos X e Y se movem na direção de C e D ao longo dos caminhos CX e DY (figura 16).

Conclui-se que existe uma relação entre os caminhos originados em A e em B com os originados em C e D. Estabelecendo-se esta relação, se todos os caminhos, por exemplo, originados em A e em B

No ponto de interação do caminho com a isolinha procedemos, então, as seguintes construções:

a) determinar a curvatura C do caminho;

b) determinar a tangente t_1 ao caminho e a tangente t_2 à isolinha — estas tangentes são perpendiculares;

c) com centro no ponto, construir a esfera de raio C ;

d) determinar o plano β tangente à esfera, paralelo a t_1 e fazendo com o plano α das duas curvas (caminho e isolinha) um ângulo $\hat{\alpha}$ (figura 19). A interseção do plano β com o plano α e a tangente t_1 devem se encontrar em lados opostos em relação ao caminho.

Define-se a superfície ϕ tangente a todos os planos β_i nos pontos P_i . Em conseqüência:

1) a normal n a superfície no ponto P (n é perpendicular a β) e a perpendicular p ao plano α no ponto O fazem um ângulo igual a $\hat{\alpha}$;

2) o plano $(n - t_1)$ corta o plano β ao longo de uma reta s paralela à interseção $\alpha \times \beta \rightarrow x$;

3) o plano $(n - t_2)$ pertencente ao ponto P corta o plano β ao longo de uma reta y perpendicular a x ;

4) as retas s e y são, respectivamente, as projeções de t_1 e t_2 do plano α , sobre o plano β , na direção da normal n .

Enunciamos, então, o seguinte problema: dado um ponto P na superfície ϕ , determinar as tangentes à isolinha e ao caminho mínimo correspondente ao ponto O do plano α (figura 20).

A solução se obtém determinando o plano β tangente a superfície ϕ no ponto P . Dado a geração da superfície ϕ , o plano β faz com o plano α um ângulo $\hat{\alpha}$. Encontramos a interseção dos dois planos, reta x . Por P traçamos a paralela s a x e a perpendicular y a x . Projeta-

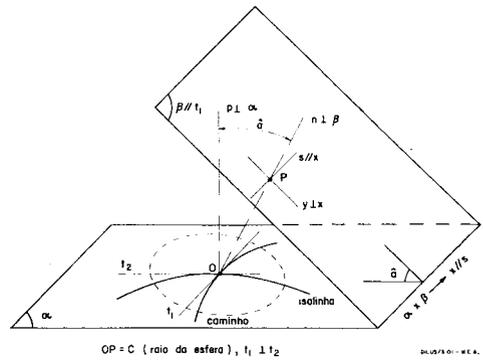


Figura 19

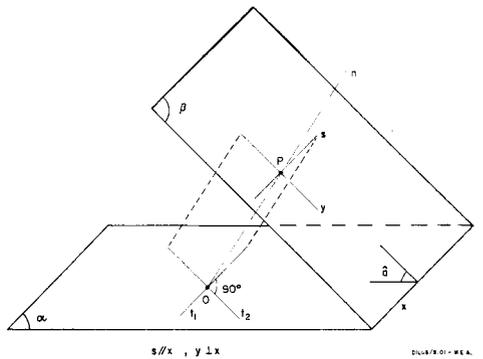


Figura 20

mos s e y sobre o plano α na direção de n para se obter t_2 e t_1 tangentes, respectivamente, à isolinha e ao caminho mínimo que passa por O , projeção de P sobre α na direção de n .

Procedemos, então, com a geração das superfícies ϕ_1 e ϕ_2 . A primeira é gerada ao longo dos caminhos originados em A e a segunda ao longo dos caminhos originados em B . Que ϕ_1 e ϕ_2 não coincidem pode ser demonstrado como se segue.

A um ponto T , interseção de caminhos gerados em A e em B (ver figura 21), corresponde em ϕ_1 um ponto T_1 obtido em função da curvatura C_1 e tangente em T de AT . Ao mesmo ponto T corres-

ponde em ϕ_2 um ponto T_2 obtido em função da curvatura C_2 tangente em T de BT.

Geralmente, $C_1 \neq C_2$ e T_1 e T_2 não coincidem; e mesmo que $C_1 = C_2$ os pontos ainda não coincidem porque os planos tangentes às esferas de raio $C_1 = C_2$ não coincidem.

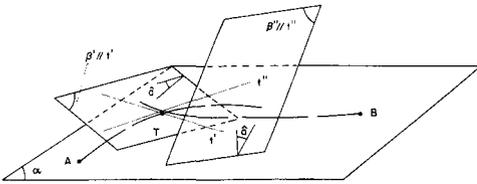


Figura 21

Assim, a interseção $\phi_1 \times \phi_2 \rightarrow$ curva ε é determinada tendo-se já visto que esta curva é relacionada ao caminho CD.

A curva ε tem interessantes propriedades, derivadas como se segue.

Impondo a condição de que, em cada superfície, o ângulo \hat{a} entre o plano tangente β_i e o plano α permaneça constante, obtemos duas superfícies ϕ_1 e ϕ_2 que não apresentam um máximo, isto é, não há planos tangentes à superfície paralelos ao plano α .

Considere-se o ponto S_1 no caminho CD. Para determinar o correspondente ponto S' na superfície ϕ_1 , encontramos a curvatura C_1 de AS_1 em S_1 . Para determinar o correspondente ponto S'' na superfície ϕ_2 encontramos a curvatura C_2 de BS_1 em S_1 . S' não coincide com S'' particularmente porque as tangentes em S_1 de AS_1 e de BS_1 não coincidem.

Levando em consideração que nenhuma das superfícies tem um máximo, sua interseção é uma curva em cujos pontos podemos passar planos tangentes às superfícies ϕ_1 e ϕ_2 . A um ponto da curva corresponde um ponto em caminho originado em A e um ponto em ca-

minho originado em B, não coincidentes e, portanto, não pertencentes ao caminho CD. Os dois pontos são, entretanto, simétricos em relação a CD. Este fato é demonstrado levando-se em conta que todos os planos tangentes a ϕ_1 e ϕ_2 em pontos da curva ε , geram uma superfície de constante inclinação em relação ao plano α . Para uma superfície deste tipo, os planos tangentes são também tangentes a um grupo de cones, de ângulo constante, cujos vértices são pontos da curva ε e cujos eixos são perpendiculares a α (figura 22).

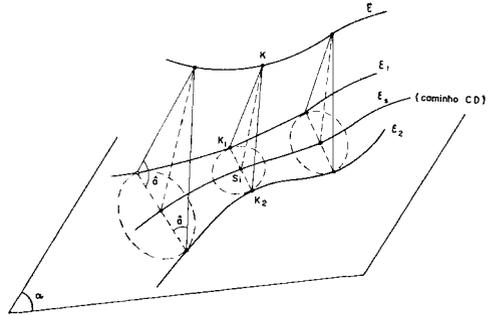


Figura 22

A figura 22 mostra a relação entre um ponto K de ε e os pontos K_1 e K_2 de α . K_1 é ponto de caminho originado em A e K_2 é ponto de caminho originado em B. No plano α , o lugar geométrico de pontos K_1 é a curva ε_1 e o lugar geométrico de pontos K_2 é a curva ε_2 . Estas duas curvas são também a interseção das duas folhas da superfície de constante inclinação em relação ao plano α e, mais importante, são simétricas em relação à curva ε_s , lugar geométrico dos centros S_i das bases dos cones.

Assim, relacionando a curva ε ao caminho CD devemos ter as seguintes condições satisfeitas:

a) a um ponto K de ε corresponde um ponto K_1 de um caminho originado em A e um ponto K_2 de um caminho originado em B;

b) os pontos K_1 e K_2 são simétricos em relação ao caminho CD.

Verificamos que a curva ϵ_s satisfaz as duas condições acima: K_1 e K_2 são pontos em caminhos originados em A e B, simétricos em relação a ϵ_s .

Finalmente, portanto, a curva ϵ_s , projeção ortogonal de ϵ sobre o plano α é o caminho mínimo CD procurado.

Permanece, porém, para ser resolvida a questão da determinação do valor a ser designado para as isolinhas. Isto é necessário porque se desejamos determinar a posição destas isolinhas, procedimento semelhante deveria ser seguido trabalhando-se com os pontos A, B e C e um ponto E. Neste caso, determina-se o caminho mínimo de C para E (figura 23). K_1 e K_2 são pontos dos caminhos originados em A e B, correspondentes ao ponto K de ϵ .

A solução para este problema pode ser obtida em função do valor das curvaturas das isolinhas nos pontos K_1 e K_2 , conforme relacionadas às curvaturas das seções ortogonais normais às superfícies ϕ_1 e ϕ_2 no ponto correspondente K.

Referindo-se à figura 21, no plano α construímos a elipse cujo eixo maior é proporcional a $I_1(q_1 + q_2)$ e cujo eixo menor é proporcional a $2I_2 \sqrt{q_1 q_2}$, sendo q_1 e q_2 as curvaturas das isolinhas e I_1 e I_2 são os valores associados às isolinhas que tenham tangente comum.

No plano β construímos a elipse cujo eixo maior é $(C_1 + C_2)$ e cujo eixo menor é $2\sqrt{C_1 C_2}$, sendo C_1 e C_2 as curvaturas das duas seções ortogonais normais.

Ao final do capítulo, justificamos a escolha para estes valores para comprimentos dos eixos das elipses.

Prosseguindo, pela figura 24, verificamos que a proporcionalidade entre os eixos maior e menor

da elipse no plano α é tal que sua projeção no plano β na direção da normal a β é a elipse neste plano.

Devido a projeção e porque os eixos t_1 e s são paralelos, temos

$$G_1 (I_1 (q_1 + q_2)) = (C_1 + C_2)$$

$$(G_2 I_2 \sqrt{q_1 q_2}) \cos \hat{a} = \sqrt{C_1 C_2}$$

sendo G_1 e G_2 constantes de proporcionalidade.

As duas relações são funções de I_1 , I_2 , q_1 e q_2 . Mas as superfícies ϕ_1 e ϕ_2 podem ser geradas em função de q_1 ou de q_2 no lugar da curvatura do caminho mínimo. Assim, se resolvemos o problema trabalhando alternadamente com q_1 e q_2 , o mesmo caminho é obtido e as curvaturas das isolinhas em pontos ao longo do caminho, originados em C ou em D, são determinadas.

Portanto:

$$I'_1 = G_1 I_1 = \frac{C_1 + C_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

$$I'_2 = G_2 I_2 = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{\cos \hat{a} \sqrt{\rho_1 \rho_2}}$$

obtendo-se valores proporcionais a I_1 e a I_2 ou seus valores reais se G_1 e G_2 são conhecidos. G_1 e G_2 dependem da relação entre I_1 e I_2 , mas verificamos que não seria necessário determinar que relação é

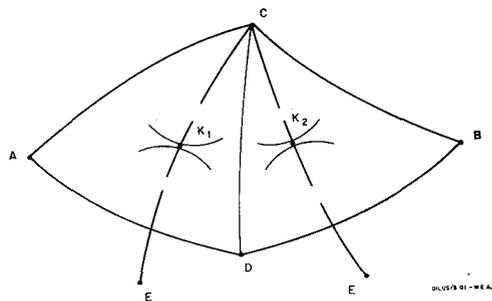


Figura 23

esta, podendo-se perfeitamente operar com I'_1 e I'_2 .

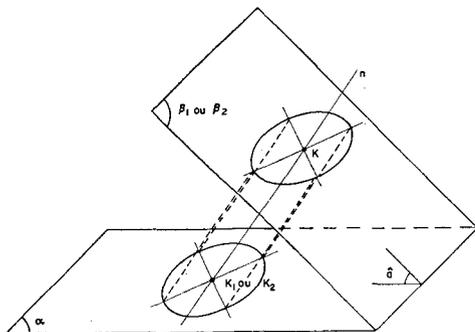


Figura 24

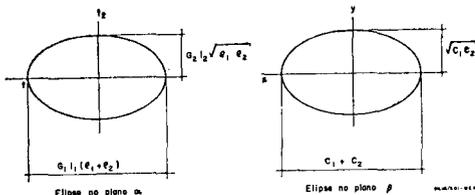


Figura 25

Observações:

a) na construção das elipses da figura 24 os valores dos eixos maior e menor são tais que seria possível relacioná-los a indicatriz de Dupin. Nesta indicatriz os eixos maior e menor são iguais, respectivamente, a $(K_1 + K_2)$ e $2\sqrt{K_1 K_2}$ onde K_1 e K_2 são as curvaturas das seções principais da superfície no ponto considerado na superfície;

b) na figura 15 o ponto N é a interseção de quatro superfícies, q_1, q_2, λ_1 e λ_2 geradas ao longo dos caminhos originados em A, B, C e D, respectivamente. Na figura 18, o ponto S_1 é a interseção de quatro outras superfícies geradas ao longo dos caminhos originados em A, B_1 , C e D.

4 — CAMINHO DE MÍNIMO CUSTO: SEGUNDA PROPOSTA DE GENERALIZAÇÃO, COM APLICAÇÃO NA DETERMINAÇÃO DE CAMINHO DE MÍNIMO TEMPO

Na figura 26 tomemos o ponto L de CB e o ponto G de AD, traçando os caminhos AL e BG.

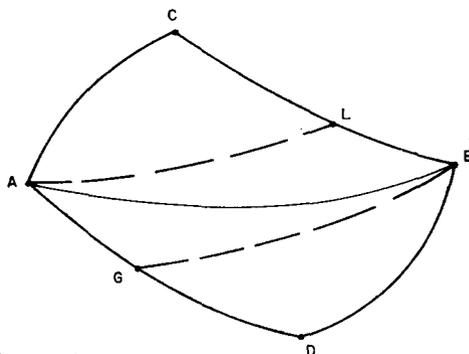


Figura 26

Podemos declarar, de uma forma geral, que as curvaturas nos pontos de AL são distintas das de BG e que, mesmo que encontrássemos pontos onde as curvaturas fossem iguais, certamente as tangentes nestes pontos seriam distintas.

Permitindo que o ponto L se aproxime de B, e G se aproxime de A, obtemos os caminhos AB e BA coincidentes, para o qual as tangentes nos pontos de $AL \equiv AB$ coincidem com as tangentes nos pontos de $BG \equiv BA$.

Pressupomos, a seguir, que os caminhos originados em C e D são conhecidos (figura 27).

Neste caso, os seguintes pressupostos são válidos:

G se desloca ao longo de DA até coincidir com A;

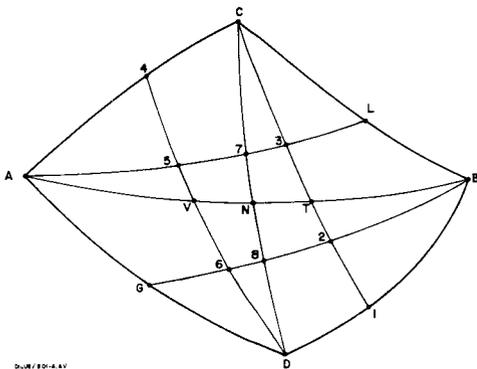


Figura 27

6 se desloca ao longo de D4 até coincidir com V;

8 se desloca ao longo de DC até coincidir com N;

L se desloca ao longo de CB até coincidir com B;

3 se desloca ao longo de C1 até coincidir com T;

7 se desloca ao longo de CD até coincidir com N

5 se desloca ao longo de 4D até coincidir com V;

2 se desloca ao longo de 1C até coincidir com T;

L se desloca ao longo de CB até coincidir com B;

1 se desloca ao longo de DB até coincidir com B.

Em consequência, pontos dos caminhos AB ou BA são obtidos da seguinte forma:

A se encontra na interseção de C4 e DG;

B se encontra na interseção de CL e D1;

N se encontra na interseção de C7 e D8.

Para os pontos V e T, as seguintes considerações devem ser levadas em conta (figura 28).

Existe um caminho CJ que leva K de AL em coincidência com V

e um caminho DF que leva X de BG em coincidência com T. Assim:

V se encontra na interseção de CJ e D4;

T se encontra na interseção de C1 e DF.

Na nossa primeira proposta de generalização (capítulo 3) vimos que ao longo dos caminhos originados em C e D podemos gerar duas superfícies λ_1 e λ_2 e que estas duas superfícies não coincidem, embora sejam caracterizadas pelo fato de planos tangentes a pontos que lhes pertençam façam com o plano α dos caminhos uma ângulo igual a \hat{a} , constante. Estas superfícies, necessariamente, se cortam ao longo de uma curva ϵ' cuja projeção ortogonal sobre o plano α é o caminho AB.

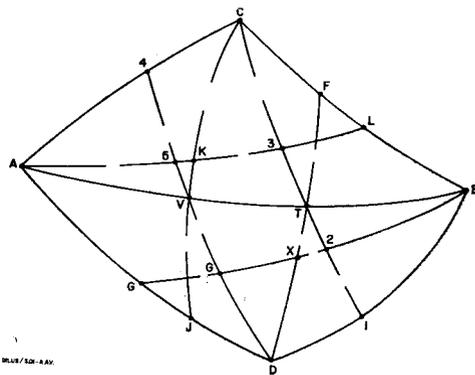


Figura 28

Gerando-se as superfícies ϕ_1 e ϕ_2 ao longo dos caminhos originados em A e B, sua interseção, curva ϵ , projetada ortogonalmente sobre o plano α , produz o caminho CD.

Estas relações aparecem, então, expressas de forma planar, no plano α , como mostram as figuras 27 e 28. No caso, estamos pressupondo o conhecimento dos caminhos gerados a partir de C e D e a posição dos pontos A e B. Procura-se o caminho AB. A solução se obtém através de um processo de geração de equações dos cami-

nhos CA, CB, DA e DB. Sobre estes caminhos tomam-se pontos móveis 4, L, J e F. Neste caso, os caminhos CJ, C1, D4 e DF são imediatamente encontrados pelo método direto (capítulo 2). Trata-se de determinar a posição dos pontos V e T de forma a se obter os pontos auxiliares 2, 3, 5 e 6 satisfazendo condições de pertinência aos vários caminhos indicados. Basicamente, trata-se de um processo iterativo de programação direta.

A configuração apresentada nos serve, agora, para propor uma extensão da determinação de caminhos de mínimo custo para a determinação de caminhos de mínimo tempo de particular interesse para o transporte aéreo. Esta transição é diretamente obtida, pressupondo-se que o caminho de mínimo custo se transforma no de mínimo tempo por meio de vetores cuja magnitude e direção varia de ponto a ponto ao longo do caminho. A magnitude e a direção do vetor são funções de fatores que influenciam, em cada ponto, o tempo de deslocamento entre dois pontos.

Considera-se, pois, o caminho mínimo AB da figura 29, as isolinhas relativas a A e B e um ponto N. Estas isolinhas admitem a mesma tangente no ponto N.

Se aplicamos nos pontos da isolinha I relativa a A seus respectivos vetores, obtemos a isolinha I_t a qual o caminho de mínimo tempo $(AB)_t$ é perpendicular (figura 30).

Ao ponto N corresponde um vetor que o transforma no ponto N_t .

A determinação do caminho de mínimo tempo BA e que não coincide com o caminho de mínimo tempo AB depende da determinação da posição das isolinhas T_t , transformações de T_1 , isolinhas relativas a B. Deseja-se, então, verificar se, conhecida a transformação de I_1 em I_t , é possível encontrar a transformação de T_1 em T_t .

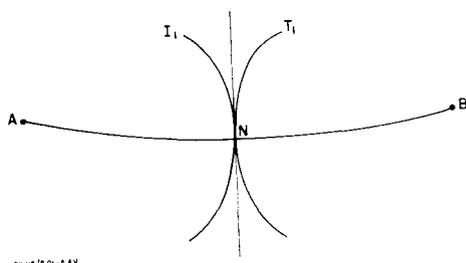


Figura 29

A solução que propomos leva em consideração todos os caminhos originados em A, conhecidos, e as magnitudes e direções de todos os vetores correspondentes a cada ponto do plano dos caminhos e isolinhas.

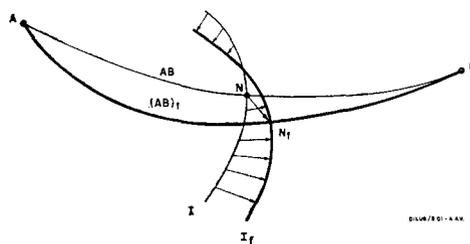


Figura 30

Na figura 29, como N é o ponto de T_1 e a este ponto corresponde um vetor único, concluímos que N_t é o ponto de T_t . Assim, N_t é a interseção de I_t e T_t .

Traçamos a seguir qualquer caminho mínimo originado em A e determinamos o ponto S onde este caminho corta a isolinha T_1 . Por S passa uma isolinha I_2 relativa a A e cuja correspondente I'_t pode ser determinada. Assim, a A corresponde o ponto S_t de I'_t , mas pertencente também a T_t . Se isto é feito para todas as interseções S_i de todos os caminhos originados em A com a isolinha T_1 relativa a B, obtemos todos os pontos da isolinha transformada T_t (figura 31).

Estendendo a construção a todas as isolinhas T_i relativas a B, obtemos todas as isolinhas transformadas T_{it} e relativas àquele ponto.

Naturalmente, o caminho de mínimo tempo (AB)_t é perpendicular às isolinhas I_{tt} relativas a A e o caminho de mínimo tempo (BA)_t é perpendicular às isolinhas T_{it} relativas a B (figura 32).

Esta solução pode ser aplicada a qualquer par de pontos. Vimos como determinar o caminho de mínimo tempo entre dois pontos e as respectivas isolinhas quando todos os caminhos originados nos pontos a todos os demais são conhecidos. Como a determinação do caminho mínimo é feita em função dos conjuntos de caminhos, a solução generalizada é proposta da seguinte forma:

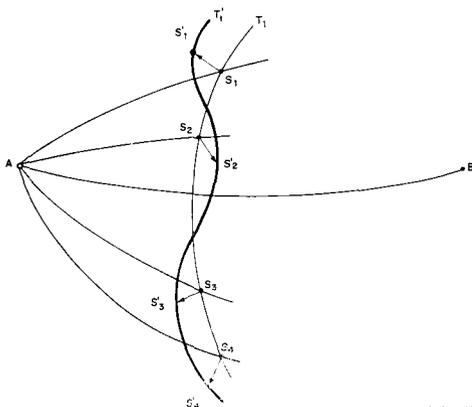


Figura 31

Dados: os caminhos mínimos originados em dois pontos A e B e a magnitude e direção dos vetores atuando em todos os pontos, determinamos os caminhos de mínimo tempo (AB)_t, (BA)_t, (CD)_t e (DC)_t.

Solução:

a) determina-se o caminho (CD)₁ ≡ (CD)₁;

b) determina-se (AB)_t, (BA)_t, (CD)_t e (DC)_t conforme discutido (figuras 31 e 32).

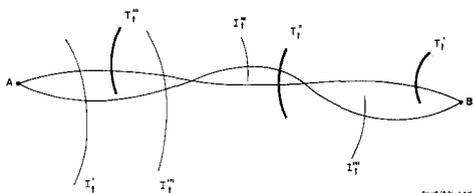


Figura 32

5 — CAMINHOS DE MÍNIMO CUSTO: TERCEIRA PROPOSTA DE GENERALIZAÇÃO FACTÍVEL DE PROGRAMAÇÃO

Lindgren (1969) aponta que é possível obter uma nova configuração para a distribuição de pontos p_i sobre uma curva plana x_i . A representativa desta configuração é marcada nas perpendiculares levantadas, em cada ponto de x_i , ao plano de x_i (figura 33), substituindo a forma mais usada de se traçar as perpendiculares à curva no seu próprio plano (figura 34).

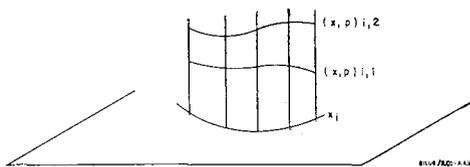


Figura 33

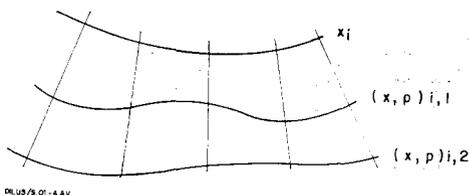


Figura 34

A superfície gerada na figura 33 é cilíndrica e, portanto, desenvolvível, isto é, a superfície pode ser planificada.

Seja, então, a distribuição sobre uma região, como mostra a figura 35, a distribuição sendo a correspondente ao diagrama de Huygens, por exemplo. Supomos que o caminho mínimo indicado tenha se originado em A. É, assim, possível, determinar o caminho mínimo de um ponto B ao ponto A, traçando por B uma normal à isolinha mais próxima, encontrando-se o ponto b_1 . De b_1 repetimos a construção, traçando uma normal à isolinha que lhe é mais próxima. E desta forma sucessivamente até se atingir o ponto A. Ab_1B é o caminho mínimo de A para B.

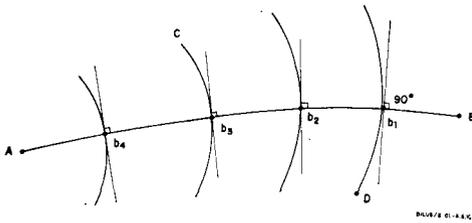


Figura 35

O problema da generalização é a determinação do caminho mínimo entre dois pontos C e D.

Em nossas propostas anteriores relacionamos o caminho CD com a interseção de duas superfícies geradas como funções dos caminhos mínimos originados em A e B. A projeção ortogonal sobre o plano dos caminhos da interseção das duas superfícies determinava CD.

Executemos, entretanto, uma simples transformação dos elementos da figura 35, como a seguir indicado. B_1 é algum ponto na região e sabemos como determinar o caminho AB_1 , b_k são as interseções deste caminho com as isolinhas entre A e B_1 . Como por b_1 traçamos a normal a isolinha que

lhe é mais próxima, b_1b_2 é a tangente ao caminho no ponto b_2 e esta tangente é perpendicular à tangente à isolinha que passa por b_2 . Isto é indicado na figura 35.

Com centro em b_1 e raio b_1B giramos o ponto B até que ele pertença a b_2b_1 .

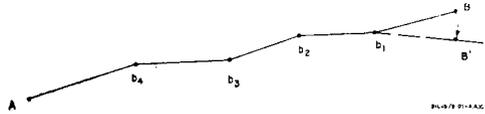


Figura 36

A seguir, com centro em b_2 e raios b_2b_1 e b_2B' , giramos b_1 e B' até pertencerem a b_3b_2 (figura 37).

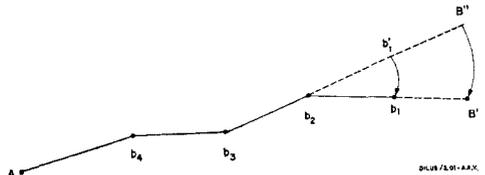


Figura 37

E assim, sucessivamente, até que todos os pontos se encontrem alinhados em Ab_4 .

Considerando todos os caminhos originados em A, aplicando-se a transformação acima, obteremos um feixe de retas originado em A, com todas as distâncias $b_k b_{k+1}$ permanecendo inalteradas (figura 38).

Compara-se a configuração da figura 38 com a da figura 34. O que se tem é o correspondente ao método usual e nos propomos a modificar a configuração semelhante à mostrada na figura 33.

Ao plano de A e de sua isolinha mais próxima, nos pontos b_1, c_1, d_1, f_1 , etc., levantamos perpendiculares ao plano, obtendo-se uma

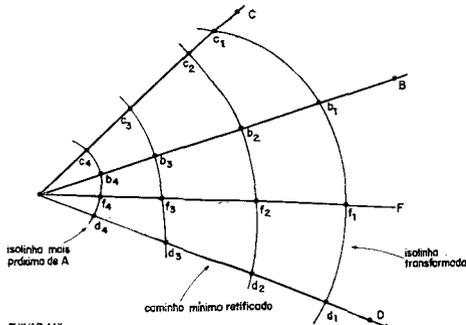


Figura 38

superfície cilíndrica. Esta superfície é, em seguida, planificada, o que se obtém retificando a isolinha mais próxima de A. O resultado obtido (figura 39) mantém uma relação biunívoca com o diagrama de Huygens.

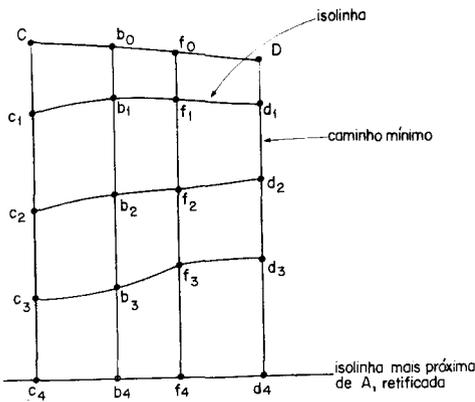


Figura 39

Sejam C e D dois pontos da região. Como se tem o desenvolvimento de uma superfície cilíndrica e como nesta superfície a linha geodésica (caminho mínimo) entre dois pontos se desenvolve como um segmento de linha reta, o caminho mínimo procurado se representa no desenvolvimento (figura 39) como o segmento de linha reta CD. Para obter a posição do caminho mínimo na figura 35 basta encontrar a posição dos pontos b_0 , f_0 , etc., nos caminhos mínimos AB, AF, etc. (figura 40).

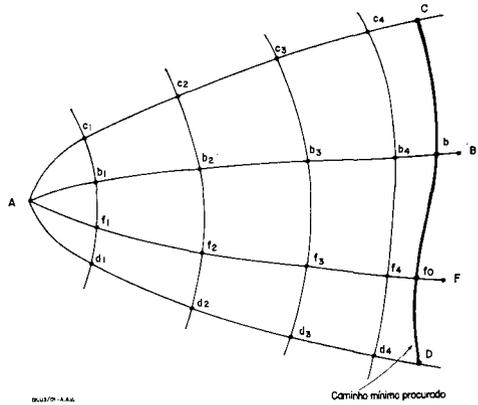


Figura 40

6 — CONCLUSÕES

Lord Kelvin propôs, em um artigo publicado em *Nature* (1892), um método para a “mercatorização” de superfícies não desenvolvíveis. Por “mercatorização” se compreendeu como a necessidade, apenas, de se manter condições de conformalidade. Em essência, o método consistia em traçar duas famílias ortogonais de curvas na superfície, gerando quadrados de tamanho infinitesimal. O próximo passo era “alterar todos os quadrados para um só tamanho e colocá-los lado a lado”.

É óbvio que esta transformação é uma que estabelece uma relação biunívoca entre os pontos do plano e os pontos da superfície. A relação é uma de posição apenas, exceto pelas poucas propriedades referentes a conformalidade.

As idéias apresentadas nesta tese germinaram a partir da leitura do trabalho de Lord Kelvin. Verifica-se o enorme potencial de aplicabilidade de leis, conceitos, propriedades na física, na geometria, em problemas sócio-econômicos ou que sejam afetados por fatores sociais e econômicos. A factibilidade de se operar com espaços taxonômicos isomórficos com o espaço euclidiano é a demonstração mais objetiva desta afirmação.

Procurou-se, assim, aumentar o corpo de conhecimento da área da física-social, experimentando com problemas da área de transportes e pelos resultados do embasamento teórico resultante, temos confiança de que o objetivo foi alcançado.

Dever-se-ia ampliar esta área, enriquecendo o instrumental do planejador que dispõe de enorme fonte de referência como provocadora para a atividade criativa.

Quanto ao uso abundante da expressão gráfica, justificamo-nos. A tecnologia e a especialização criam linguagens herméticas que se agravam por se endereçarem a temas esotéricos e/ou exóticos. O retorno ao simbolismo primitivo, que é o desenho, a geometria, alivia e ajuda, pois que, como afirmava Santarila, "operar com álgebra é

como navegar com um compasso enquanto que com geometria é como navegar com um compasso, olhando a costa".

O fecho para esta dissertação pode ser expresso de forma positiva, portanto. A observação visual da figura 10, no capítulo 2, ao qual se aplica a proposta de generalização desenvolvida no capítulo 5 mostra que o objetivo é alcançado. O que parecia inviável, exigindo a repetição da construção dos caminhos a partir de todo e qualquer ponto no território nacional se torna factível e de forma direta e simples: a retificação dos caminhos mínimos originados em Brasília permitirá que se identifique a posição dos caminhos originados em qualquer outro ponto geográfico.

BIBLIOGRAFIA

- ABLER, Ronald, ADAMS, J. S., GOULD, P. *Spatial Organization*, New York: Prentice-Hall Inc. 1971.
- LINDGREN, C. Ernesto S., *Proposed Solution for the Minimum Path Problem*, Cambridge: Harvard University, 1967.
- ., *A Minimum Path Problem Reconsidered*, Cambridge: Harvard University, 1969.
- ., *Notes on the Methodology for Generation the Representative of a Set*, Cambridge University, 1969.
- ., *Análise de Dados*, PDD 4/76, Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1976.
- ., *Representação Gráfica de uma Matriz de Distâncias Sociais*, *Revista Brasileira de Geografia*, Rio de Janeiro: IBGE, 1976.
- LORD KELVIN, *Generalization of Mercator's Projection Performed by Aid of Electrical Instruments*, *Nature*, vol. XLVI, September 22, 1892, p. 490-491.
- PETTERLE, R. T., *Manual de Utilização do Modelo Gravitacional e dos Programas TAXIN, POTENCIAL II e III*, PTC 7/76, Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1976.
- WARNTZ, William, *A Note on Surfaces and Paths and Applications to Geographical Problems*, Ann Arbor: University of Michigan, 1965.

SUMMARY

This thesis has the purpose of identifying analogue themes in Physics and in Transport Planning, with emphasis in the socioeconomic aspects of the latter, contributing to the creation of new knowledge in the broadest area of Social-Physics.

Its main contribution is the presentation of a general solution of a problem that relates in the physical-socioeconomic space, variables that determine the connection between a selected point and any other point of the space, in order to make feasible, from that information, the connections between any two points of the same space.

RÉSUMÉ

La thèse propose l'identification des thèmes analogues dans le domaine de la Physique et du Planning de Transports. Les aspects socio-économiques de ce dernier ont été abordés, et des informations nouvelles dans le domaine de la Physique Sociale sont apparues.

La principale contribution est une solution générique du problème qui met en rapport, dans l'espace physico-socio-économique, des variables qui déterminent la liaison entre un point choisi et un point quelconque de l'espace. Par les informations ainsi obtenues on a pu établir les liaisons entre deux points quelconques d'un même espace.