

# Distribuição ordem-tamanho, hierarquias de cidade pelo tamanho e o modelo de Beckmann: alguns resultados empíricos

---

LUÍS SUÁREZ-VILLA \*

**A**S hierarquias de cidade pelo tamanho e sua distribuição atraíram a atenção de geógrafos e cientistas regionais desde o aparecimento dos importantes trabalhos de Christaller (3) e Lösch (5). Num artigo de 1958, Martin Beckmann (1) procurou desenvolver esses trabalhos clássicos formulando um modelo matemático que ligava as hierarquias dos centros urbanos às suas áreas de mercado complementares. A distribuição hierárquica resultante, estipulada por Beckmann, aproximaria significativamente uma distribuição ordem-tamanho desses centros.

O presente trabalho procura (I) investigar a relação entre a hierarquia de cidade pelo tamanho e sua distribuição ordem-tamanho, e (II) calcular o parâmetro ( $k_i$ ) de fator de serviço especificado no modelo de Beckmann. As estimativas serão baseadas em dados reais da região sudeste do Brasil.

## 1. MODELO DE BECKMANN

Baseado nos pressupostos básicos de que (a) o tamanho de qualquer cidade é proporcional à população da área de mercado por ela servida, e (b) de que as cidades de cada ordem hierárquica têm um

---

\* O autor encontra-se presentemente como pesquisador convidado do Instituto de Pesquisas Tecnológicas da Universidade de São Paulo, Brasil. A pesquisa original e o primeiro esboço deste trabalho foram feitos enquanto realizava uma pesquisa no Department of City and Regional Planning, Cornell University. Reconhecemos e agradecemos a orientação preliminar dada pelo Professor Richard E. Schuler, do Departamento de Economia, Cornell University.

número fixo de centros da ordem imediatamente abaixo, Beckmann e McPherson (2) expressaram o tamanho da cidade como uma função do tamanho de suas áreas complementares <sup>1</sup>.

Uma cidade de qualquer ordem  $n$  teria, portanto,  $m_{n-1}$  cidades-satélites da ordem imediatamente abaixo  $n - 1$  <sup>2</sup>. Supõe-se que cada centro seja circundado por uma população de área de mercado composta pela população da cidade satélite da ordem imediatamente abaixo e de suas áreas complementares, descendo para a ordem mais baixa onde a área complementar seria a população rural servida por cada centro da ordem mais baixa.

Assim, o tamanho de cada população de centro de ordem  $n^{\text{th}}$  pode ser previsto através do uso de um fator de serviço ( $k_i$ ) especificado num "multiplicador de serviço" da população de ordem  $(n - 1)$  imediatamente abaixo <sup>3</sup>. Demonstrando esse modelo com dados hipotéticos, Beckmann e McPherson (2, p. 31) estipulam o parâmetro  $k_i$  como constante, com apenas diminutas variações de uma ordem para outra <sup>4</sup>.

Então, o tamanho da população de um centro de ordem  $n^{\text{th}}$  torna-se proporcional à população rural básica servida por um centro da ordem mais baixa e, por meio do componente geometricamente crescente, a função estipulada adquire um caráter exponencial do tipo especificado para uma distribuição ordem-tamanho,

$$(4) \quad c = a \cdot R^{-b}$$

onde  $c$  é população urbana,  $R$  é ordem de população urbana, e  $a$  e  $b$  são parâmetros positivos.

## 2. APLICAÇÃO AO SUDESTE DO BRASIL

O modelo hierárquico que mais se aproxima do da Região Sudeste do Brasil não é o modelo de Christaller, mas sim uma versão modificada que limita o pressuposto de Christaller de condições de transporte exis-

1 O artigo de Beckmann e McPherson de 1970 [2] foi uma revisão do artigo original de Beckmann de 1958 [1], depois de algumas críticas feitas por Parr [7] e Dacey [4].

2 Para uma cidade da ordem mais baixa,

$$c_1 = \frac{k_1}{1 - k_1} \cdot r$$

onde  $c_1$ : população urbana,  $r$ : população rural servida, e  $k_1$ : fator de serviço. Assim, para uma cidade de ordem  $n^{\text{th}}$ ,

$$c_n = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{1 - k_j} \cdot s_i$$

onde  $s_i$ : população da área de mercado complementar de cada centro;  $s$  pode ser calculado a partir de

$$s_n = s_{n-1} + m_{n-1} (s_{n-1} + c_{n-1})$$

onde  $m_{n-1}$  é o número de cidades-satélites da ordem  $n-1$  imediatamente abaixo.

3 Multiplicador de serviço de Beckmann:

$$\sum_{j=1}^n \frac{k_j}{1 - k_j}$$

4 Em Beckmann e McPherson [2]:  $k_2 = ,0450$ ,  $k_3 = ,0370$ ,  $k_4 = ,0314$ ,  $k_5 = ,0285$ ,  $k_6 = ,0300$ ,  $k_7 = ,0345$ ;  $k_1$ , com um valor de ,2285, bem diferente dos outros, é ignorado pelos autores.

tentes em todos os lugares. Um dos diferentes modelos ilustrados por Beckmann e McPherson (2), com um fator de agrupamento (nesting factor) de três ( $m = 3$ ) é, de fato, o que parece mais se aproximar do do Sudeste do Brasil. Isto pressupõe que centros da ordem  $n^{\text{th}}$  estão em posição intermediária ao longo das estradas ligando centros de ordem superior, de maneira que tais centros fiquem equidistantes de dois centros de ordem superior, em vez de três, como acontece com o esquema de Christaller de localidade central.

Os dados disponíveis fornecem valores para a população urbana e rural. Os resultados da tabela 1 são obtidos organizando nossos centros urbanos de acordo com um fator de agrupamento (nesting factor) de  $m = 3$ , e calculando os valores  $k$  e  $s$  para cada ordem a partir das equações (1), (2) e (3).

As populações da área complementar ( $s$ ) foram formadas adotando-se uma densidade rural uniforme e calculando-se, em seguida, as áreas de mercado, de maneira que todos os pontos sejam beneficiados pelos serviços do centro mais próximo. Essas avaliações incluem, portanto, apenas a população rural na área de mercado, com a população rural da região dividida inicialmente entre o número de centros da ordem mais baixa <sup>5</sup>.

TABELA 1

*Padrão de localidade central, Sudeste do Brasil ( $m = 3$ )*

ORDEM	CENTRO INTERMEDIÁRIO DE CADA ORDEM		POPULAÇÃO URBANA MÉDIA DE CADA ORDEM		
	Posição (rank)	Distribuição	$c_i$	$s_i$	$k_i$
1	640,5	768	3332	14404	,1879
2	160,5	192	17629	67612	,1362
3	40,5	48	54198	323335	,0655
4	19,5	12	150176	1455934	,0365
5	3,	3	1421413	6274264	,0948
6	1,	1	7835481	29361295	,0826

A posição (rank) do centro médio de cada ordem na tabela 1 nos apresenta uma distribuição exponencial negativa. Aplicando-se logaritmos à equação (4), substituindo-se  $R$  nesta equação pelas posições (ranks) da tabela 1 (segunda coluna), e substituindo-se  $c$  pelos valores da população da cidade média de cada ordem (tabela 1), obtemos

$$(5) \quad \log c_i = \log a_1 - b_1 \log R_{i1}$$

onde  $b_1$  representa a inclinação linear de nossa distribuição de ordem hierárquica ( $m = 3$ ).

<sup>5</sup> População de todos os centros abaixo da distribuição da ordem mais baixa de  $m = 3$  sendo considerada rural. Para  $m = 3$  a população urbana mínima na escala da ordem mais baixa foi 1.382. Ver no Apêndice o sumário de características de dados.

Os resultados,

$$\log c_1 = 6.685 - 1.156 \log R_{t1}, r^2 = ,977, N = 6$$

(se = ,089)

indicam significância no nível fiducial de 1%, e um valor  $b_1$  que indica uma tendência à primazia em nossa ordem hierárquica.

Aplicando-se logaritmos mais uma vez à equação (4), obtemos

$$(6) \quad \log c = \log a_2 - b_2 \log R$$

que é a versão log-linear de nossa equação ordem-tamanho. Aplicando-se esta equação à população e aos dados de ordem para cada cidade de nossa região baixando até a cidade de 1024.<sup>o</sup> ordem<sup>6</sup>, obtemos

$$\log c = 6.674 - 1.129 \log R, r^2 = ,974, N = 1024$$

(se = ,006)

significante no nível de 1% e com um valor  $b_2$  indicando uma tendência à primazia em nossa distribuição ordem-tamanho.

O valor para  $b_1$  (coeficiente de hierarquia) na equação (5) está contido num intervalo fiducial de 2,5% de nosso coeficiente de regressão ordem-tamanho ( $b_2$ ) na equação (6). Menos importante, nosso valor para a constante de hierarquia ( $a_1$ ) está contido num intervalo fiducial de 2% de nossa constante de ordem-tamanho<sup>7</sup>. Assim, a função exponencial de nossa distribuição hierárquica aproxima a distribuição ordem-tamanho o suficiente para justificar o pressuposto de Beckmann de que não existe uma relação matemática entre hierarquias de tamanho de cidade e distribuições ordem-tamanho.

O pressuposto de Beckmann e McPherson de fator de serviço constante ( $k_i$ ) não é, entretanto, confirmado pelos dados. Nossos valores de fator de serviço (tabela 1) indicam muita variação de ordem para ordem, mesmo quando a primeira ordem (a mais inferior) não é levada em consideração. Para nossos valores regionais ocorre primeiramente um gradual decréscimo de nossos valores  $k_i$ , com um pronunciado aumento ocorrendo ao nível de  $k_{n-1}$ , ou aproximadamente (quinta ordem, tabela 1). Esta tendência é também evidente para os dados hipotéticos de Beckmann e McPherson (ver nota 3), embora em proporções muito mais sutis.

Duas causas possíveis podem ser as responsáveis por isso. Primeiro, nossos dados regionais têm uma "extremidade final" muito menor do que os dados de Beckmann e McPherson, e uma tendência maior à primazia que resulta numa maior, ou mais longa, "extremidade inicial" de nossa distribuição. Hierarquicamente isto se reflete com diferenças

---

6 Há um total de 1.024 cidades em nossa distribuição hierárquica. Assim, o ponto limite do tamanho da população da cidade foi 1.382 (ver nota 4). Qualquer centro com uma população inferior foi considerado não urbano. Embora houvesse mais localidades com uma população inferior, não foi considerado apropriado, por razões de compatibilidade para um teste com nossa distribuição hierárquica, um prolongamento da "parte final" da nossa distribuição ordem-tamanho.

7 Dois outros padrões hierárquicos representados por Beckmann e McPherson [2, p. 32],  $m=2$  (padrão de Christaller) e  $m=1$  (padrão linear de transporte) foram testados com nossos dados. Curiosamente, nenhuma dessas distribuições, que não representam a situação da região, aproxima a distribuição ordem-tamanho com pontos limites compatíveis, respectivamente, como a equação (5). Para  $m=1$ ,  $b_1 = 1.170$  com  $b_2 = 1.129$  (diferença: ,041) e para  $m=2$ ,  $b_1 = 1.191$  com  $b_2 = 1.041$  (diferença: ,150). Comparar esta com a diferença entre  $b_1$  e  $b_2$  em nossa ilustração acima de  $m=3$ , onde a diferença chega a ,027.

mais marcadas na população urbana média de ordem para ordem nos nossos dados do que nos dados de Beckmann e McPherson. Essa condição pode ser uma característica particular de dados regionais e especialmente de regiões primazes. Assim, os resultados podem ser diferentes para os dados de tamanho de cidade ao nível nacional, o qual terá em qualquer caso uma "extremidade final" maior e, conseqüentemente, menos variações na população urbana de uma ordem para outra.

Segundo, permanece a possibilidade de que o fator de serviço pode não ser realmente constante, como especificado por Beckmann e McPherson, mas uma função variável da população urbana de cada ordem. Se assim for, poderia parecer que o modelo de Beckmann e McPherson se presta a algumas modificações.

Finalmente, grandes variações na população urbana dentro de algumas ordens (especialmente aquelas com as cidades de maior tamanho) podem influenciar nossas estimativas para cidades de maior ou menor tamanho (conforme o caso) no espectro de ordem, dependendo do que for melhor representado na população média da cidade. Um ajustamento mais preciso de nosso modelo hierárquico  $m = 3$ , levando-se em consideração alguns dos desvios mais peculiares da região quanto ao transporte e localização da cidade, pode também servir para esclarecer o assunto. Isto requereria, entretanto, um estudo altamente detalhado da hierarquia da localidade central da região.

### 3. OBSERVAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou uma avaliação empírica da relação entre a distribuição de hierarquia urbana e a distribuição ordem-tamanho, e do parâmetro ( $k_i$ ) de Beckmann, de serviço de modelo, utilizando dados da população para a Região Sudeste do Brasil.

A aproximação de nossos coeficientes log-lineares para as distribuições hierárquicas e de ordem-tamanho confirmam o pressuposto de Beckmann de que existe uma relação matemática entre as duas funções. Isto vai contra as dúvidas de Parr (7) e Dacey (4) quanto à existência de tal relação. O pressuposto de Beckmann e McPherson de constância para o fator de serviço ( $k_i$ ), por outro lado, não é confirmado pelos nossos dados.

Uma outra pesquisa determinaria se os resultados obtidos para nossa região são também válidos na escala nacional e para as regiões primazes e não primazes nela compreendidas. Resultados diferentes podem ser obtidos para nações e regiões com vários níveis de desenvolvimento e de padrões de povoamento.

Esperamos que este trabalho estimule análises mais empíricas de localidades centrais e de padrões de distribuição de tamanho de cidade.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) BECKMANN, Martin J. — City Hierarchies and the Distribution of City Size, *Economic Development and Cultural Change*, vol. 6, 1958, pp. 243-248.  

, M. J. and MCPHERSON, J. C. — City Size Distribution in a Central Place Hierarchy: An Alternative Approach, *Journal of Regional Science*, vol. 10, n.º 1, 1970, pp. 25-33.
- (3) CHRISTALLER, Walter — *Die zentralen Orte in Süddeutschland*. Traduzido por C. W. Baskin como *Central Places in Southern Germany*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1966.
- (4) DACEY, M. F. Population of Places in a Central Place Hierarchy, *Journal of Regional Science*, vol. 6, 1966, pp. 27-33.
- (5) LÖSCH, August — *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*. Traduzido por W. H. Woglom and W. F. Stolper como *The Economics of Location*. New Haven: Yale University Press, 1954.
- (6) MILLS, Edwin S. — *Urban Economics*. Glenview: Scott Foresman, 1972.
- (7) PARR, John B. — City Hierarchies and the Distribution of City Size: A Reconsideration of Beckmann's Contribution, *Journal of Regional Science*, vol. 9, n.º 2, 1969, pp. 239-253.
- (8) ZIPE, George K. — *Human Behavior and the Principle of Least Effort*. Cambridge: Addison-Wesley, 1949.

## APÊNDICE

### Características dos Dados

#### A.1 Geral

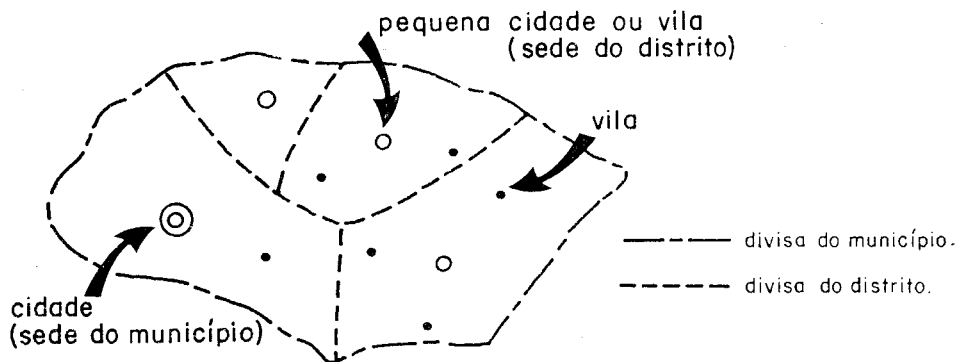
A área de estudo, uma região de planejamento, compreende quatro estados: Espírito Santo, Minas Gerais, Rio de Janeiro e São Paulo. É ela a região mais industrializada e mais urbanizada do Brasil, e compreende uma população total superior a 40 milhões de habitantes (918,800 km<sup>2</sup>), as maiores áreas metropolitanas, e uma parte desproporcional das mais modernas atividades econômicas da nação.

A região apresenta um caso de primazia dupla, como representado na figura A-1, compreendendo duas áreas metropolitanas muito grandes com mais de 6 e 7 milhões de habitantes, e a terceira com mais de 1 milhão e meio. Essas três áreas metropolitanas constituem o conhecido "triângulo de desenvolvimento" do Brasil, onde está concentrada a maior parte da atividade industrial da nação. Segue um número de áreas urbanas de tamanho intermediário (total: 17), a maior parte localizada muito próximo das três maiores áreas urbanas, oscilando de 100 a mais de 350 mil habitantes (ver figura A.2).

#### A.2 Os municípios brasileiros

Os municípios brasileiros são unidades geopolíticas territorialmente completas e contêm um nível ainda menor de subdivisão territorial, que é o distrito. O município constitui o menor nível de coleta de dados econômicos para os censos brasileiros, embora os dados gerais da população urbana e rural sejam também compilados ao nível de distrito<sup>1</sup>.

No Brasil um município leva o nome da maior área urbana compreendida dentro de seus limites. Assim, a maior cidade ou área urbana torna-se a sede do município. Cidades menores ou vilas podem se transformar em sedes dos distritos, sendo que os municípios geralmente compreendem vários distritos. Na escala, uma área de um município brasileiro está geralmente entre a do nível de *county* ou a do de *municipality* nos EUA; isto se reflete pelo número de municípios em cada um dos quatro estados da região sudeste (Espírito Santo: 53, Minas Gerais: 722, Rio de Janeiro: 64, São Paulo: 571).



O problema de se utilizar uma unidade territorialmente completa como base dos dados da população para um estudo de ordem-tamanho pode ser subestimado, dependendo da proporção da população urbana total de cada município residente na sede do município. Ocorrendo um alto valor proporcional, justificar-se-ia um estudo de ordem-tamanho baseado na população urbana total do município. A tabela A.1 representa a população urbana (dentro e fora da sede do município) como uma percentagem da população total do município (urbana e rural) para várias classes de tamanho de município.

TABELA A.1

DISTRIBUIÇÃO	(M = 1000) CLASSE DE TAMANHO	PERCENTAGEM URBANA DA POPULAÇÃO TOTAL DO MUNICÍPIO		
		Na sede do município	No município como um todo	Fora da sede do município
3	1MM +	100,	100,	0,
4.....	200M — 1 MM	92,55	93,68	1,13
13.....	100M — 200M	86,91	89,49	2,58
24.....	50M — 100M	76,66	81,16	4,52
68.....	25M — 50M	68,76	72,72	3,96
156.....	10M — 25M	55,02	59,73	4,71
219.....	5M — 10M	41,81	45,76	3,95

FONTE: *Censo Demográfico, Brasil, 1970*. Rio de Janeiro:  
Fundação IBGE, 1971, vol. 25.

A região sudeste como um todo contém 1.410 municípios que oscilam em tamanho de 268 (população urbana) a 5.924.615 (São Paulo). O final da distribuição foi limitado em alguns pontos, dependendo do tipo de esquema de localidade central adotado. Vários municípios localizados próximo às maiores áreas metropolitanas têm sido fundidos para formarem um agregado de “área metropolitana maior”. Isto será demonstrado na próxima seção.

### A.3 Fusões metropolitanas

Vários municípios adjacentes às maiores áreas metropolitanas têm-se fundido a fim de fornecerem representações mais precisas de agregados metropolitanos. São eles:

Grande São Paulo: todos os municípios da microrregião 262 (Grande São Paulo);

Grande Rio de Janeiro: todos os municípios da microrregião 221 (Fluminense do Grande Rio) e Rio de Janeiro (antigo Estado da Guanabara);

Grande Belo Horizonte: Belo Horizonte, Contagem, Nova Lima, Raposos, Sabará, Santa Luzia;

Grande Vitória: Cariacica, Vila Velha, Vitória.

Os municípios fundidos são altamente urbanizados (além de 95%), adjacentes e altamente acessíveis às áreas metropolitanas centrais.



SUDESTE DO BRASIL  
 Diagrama de ordem e tamanho das vinte maiores áreas urbanas

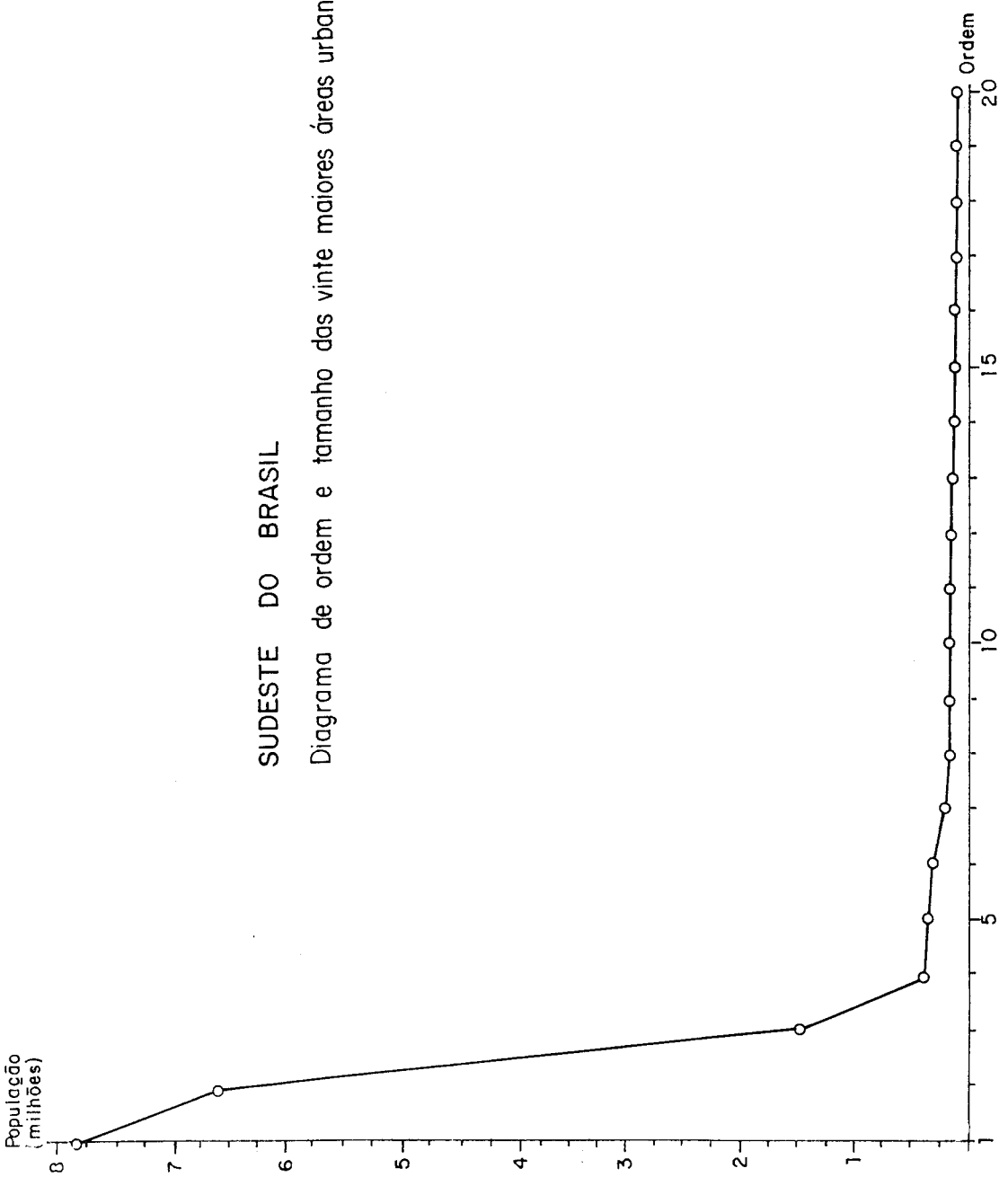


Fig. A.1

## SUDESTE DO BRASIL

Vinte principais áreas urbanas com mais de 100000 habitantes

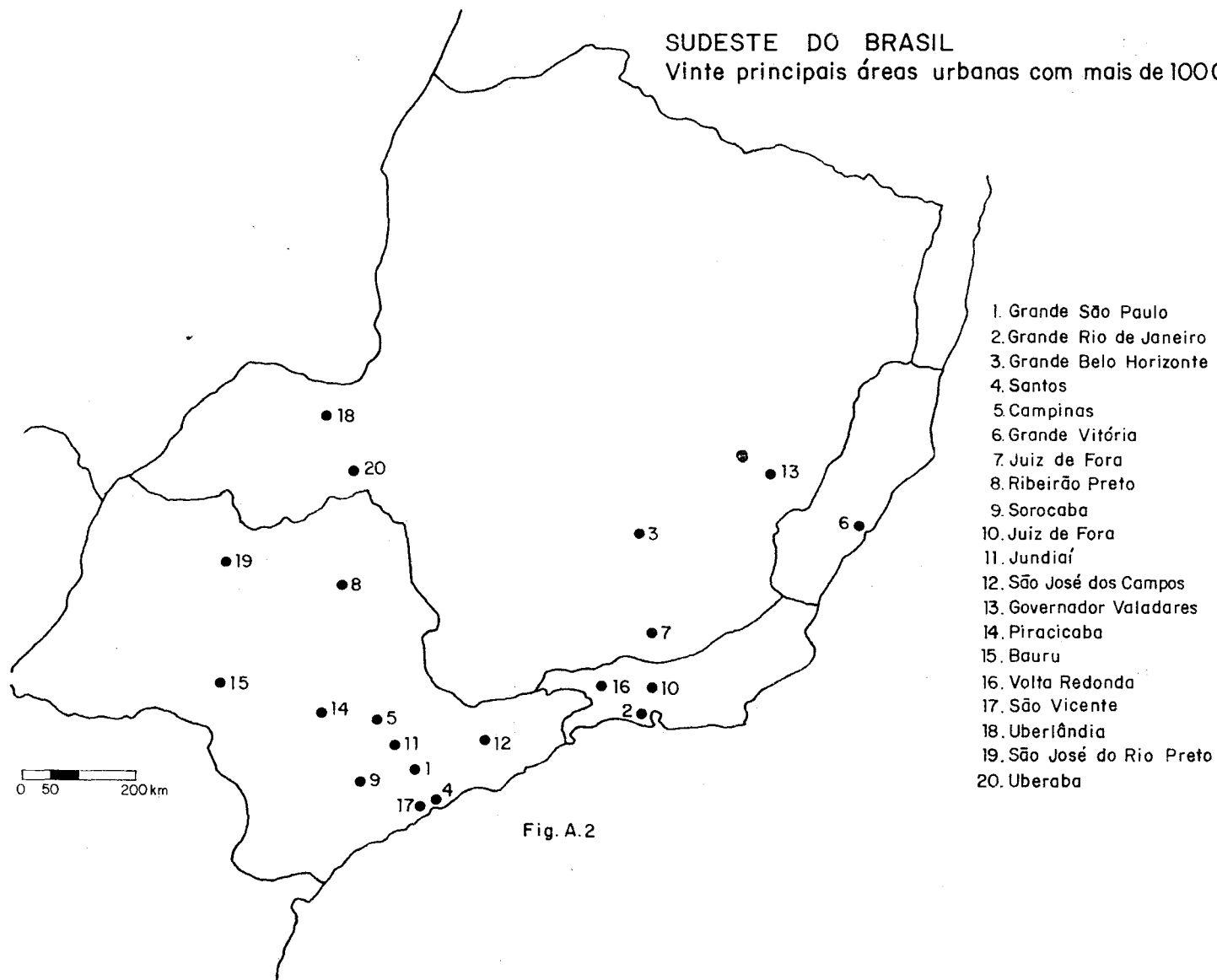


Fig. A.2