O teorema de Borsuk e aspectos técnicos do modelo de potenciais

C. ERNESTO S. LINDGREN *

1. INTRODUÇÃO

Na medida em que o modelo de potenciais mais se evidência como instrumento para compreensão da configuração ("pattern") espacial de fenômenos, maior número de conclusões deverá conter algum tipo de dificuldade interpretativa, particularmente associada aos aspectos técnicos que se discutem neste trabalho.

Até 1971 não era possível evidenciar como resolver e eliminar o surgimento das dificuldades, entretanto, com a implementação de uma solução prática do teorema de Borsuk, demonstrada por S. Ulam, que até então era considerado como essencialmente um "teorema de existência", pode-se agora discutir e sugerir um meio direto e objetivo de efetivamente utilizar o modelo de potenciais sem restrições interpretativas.

2. O TEOREMA DE BORSUK

Enuncia-se: "existe um plano e apenas um plano que, simultaneamente, divide, em duas metades, três distribuições espaciais quaisquer". A demonstração da "existência" de uma solução é devida a Steinhaus (1945), tendo sido, antes, generalizada por Stone e Tukey (1942) para qualquer número de distribuições.

* O autor é professor titular da Coordenação dos Programas de Pós-graduação de Engenharia — COPPE-UFRJ.

Lindgren (em Lindgren e Slaby, 1968, p. 55) confirma a existência deste plano bissetor de três distribuições, demonstrando que se trata de plano pertencente ao espaço tridimensional bissetor de três outros espaços tridimensionais concorrentes ao longo de uma reta. Os três espaços tridimensionais são aqueles gerados pelas três distribuições dadas. Como resultado de um esforço comum no encontro da implementação da solução prática de determinação de, pelo menos, o traço do plano bissetor em uma das distribuições que se pressupôs ser do tipo bidimensional euclidiano (plano) (Warntz, Lindgren, Bonfiglioli, Lozano e Kiernan, 1971), apresentam uma discussão completa do problema, culminando com a proposição de um programa de computação que dá a equação do traço (linha reta) do plano bissetor em uma área plana que contém uma das distribuições dadas. Em geral, esta distribuição seria a área de uma região sobre a qual se geram duas ou mais distribuições contínuas. Este programa foi recentemente aperfeiçoado e se encontra em Lindgren (1976).

3. O MODELO POTENCIAL

Derivado do modelo gravitacional, tem como expressão genérica

$$U_i = \left[\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} P_j / d_{ij} \right]_{i \neq j} + P_i / d_{ii}$$

U_i é uma medida da influência sobre um lugar i das populações de $(n-1)$ pontos j dele distantes d_{ij}. A segunda parcela estima a influência que a população P_i de i exerce sobre si mesma. A distância d_{ii} tem sido estimada de várias formas: alguns autores sugerem $d_{ii} = 1$; outros, como (Abler, Adams, Gould, 1971) sugerem que d_{ii} seja tomado como metade da distância de i ao lugar j mais próximo; Stewart e Warntz (1958) sugerem que d_{ii} seja igual à metade do raio de um círculo de área igual à área do lugar i.

Propomos eliminar estas diferenças de adoção de distâncias variáveis, demonstrando a eventual escolha de uma distância, por ser tecnicamente mais correta. Este é o primeiro dos dois aspectos técnicos do modelo que discutimos no trabalho; o segundo aspecto está também associado a esta distância, pois decorre da adoção do cálculo da distância como se propõe.

3.1. A Distância d_{ii}

Resolvemos a questão da distância por simples exclusão. Suponhamos que se faça $d_{ii} = 1$ como querem alguns autores. Perguntamos: qual a unidade? Se as distâncias d_{ij} são dadas em quilômetros, $d_{ii} = 1$ km, como aparece em (Anais, 1974). É óbvio que se as distâncias d_{ij} forem muito diferentes de 1 km (e geralmente o são), o valor do potencial U_i no lugar i será proporcional a população P_i e, de fato $(U_i - P_i)$, eliminando-se as unidades, tende a zero. É o que se nota no trabalho acima mencionado. Evidentemente, "dilui-se" a influência dos demais lugares j sobre i. Interpretado como um indicador de acessibilidade, o potencial seria, pois, medido pelo próprio valor da população de um lugar e, nestas condições, reverter-se-ia à condição da lei de Zipf. Como, porém, o modelo potencial é sugerido como alternativa à lei de Zipf em virtude de óbvias limitações do conceito de primazia, reputamos como inaceitável a consideração de $d_{ii} = 1$ (unidade de distância).

Tomemos a sugestão de ser d_{ii} igual à metade da distância do lugar i do vizinho mais próximo. Para que não se considere a adoção desta medida, basta propor o óbvio: como expressar o potencial de uma região isolada? Sem vizinhos. Ocorreria, certamente, subdividir a região em subunidades, estimar o potencial de cada uma, tomando como distância de uma subunidade a si mesma (seu d_{ii}) a metade da distância à subunidade mais próxima e obter o somatório dos potenciais parciais obtidos. Se ao leitor ocorreu esta solução está, então, raciocinando ao longo da mesma linha adotada por Stewart e Warntz quando propuseram que d_{ii} fosse igual à metade do raio do círculo de área igual à área da região total. Pois que, o que verificaram é que as distâncias entre as subunidades em que se dividiu a região, na medida em que o número de subunidades aumenta, aproxima-se da metade do raio do círculo de área igual à área da região total. Este problema já havia sido resolvido aritmeticamente quando se propôs determinar a distância média de todos os pontos de um círculo ao seu centro: esta distância média é igual à metade do raio do círculo.

Assim, utilizar como d_{ii} metade da distância ao vizinho mais próximo só corresponderia ao caso em que todas as áreas estejam, aproximadamente, igualmente distanciadas (distância entre centros de gravidade) e tenham igual área.

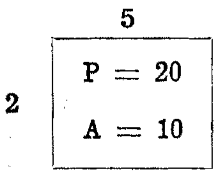
Portanto, como solução para o primeiro aspecto técnico do modelo potencial sugere-se que se adote como d_{ii} o valor da metade do raio de um círculo de área igual a área A_i da região.

$d_{ii} = (1/2\sqrt{A_i/3.14})$ f onde f é o fator de correção de Stewart e Warntz para a relação α/β onde α e β são a maior e a menor distâncias de uma forma que se diferencia de uma circunferência.

3.2. Influência de i Sobre si Mesma

A parcela P_i/d_{ii} na expressão do potencial é uma medida da influência que a população P_i exerce sobre si mesma e é também uma medida da acessibilidade do lugar i como função de P_i e d_{ii}.

Consideremos a região *i* abaixo, isolada, de área igual a 10 unidades, com uma população P = 20. Seu potencial seria dado por, apenas,

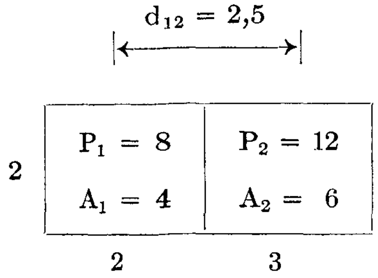


uma parcela P_i/d_{ii}, ou seja,

como $d_{ii} = 1/2\ \sqrt{10/4} = 0{,}89$

$V_i = 20/0{,}89 = 22{,}5$ unidades.

Vamos agora subdividir a área em duas subunidades, com áreas $A_1 = 4$ e $A_2 = 6$. Admitamos que as populações sejam $P_1 = 8$ e $P_2 = 12$.



Estimemos o potencial em 1 em 2 com o procedimento usual. Temos

$$U_1 = \left(\frac{P_2}{d_{12}} + \frac{P_1}{d_{11}}\right) = \left(\frac{12}{2,5} + \frac{8}{0,57}\right) = (4,8 + 14) = 18,8$$

$$U_2 = \left(\frac{P_1}{d_{21}} + \frac{P_2}{d_{22}}\right) = \left(\frac{8}{2,5} + \frac{12}{0,69}\right) = (3,2 + 18,4) = 20,6$$

Verificamos que uma população $P_2 = 12$ sobre uma área $A_2 = 6$ tem um potencial quase que igual ao de uma população de 20 sobre uma área de 10. A conclusão é de que área é uma variável de extrema importância no valor do potencial. Nota-se que a maior contribuição no potencial U_2 foi justamente a parcela correspondente à influência da população sobre si mesma. Ao mesmo tempo devemos considerar que o potencial em qualquer ponto da região deve ser igual a 22,5 unidades, isto é, o potencial total de uma população $P = 20$, seja como for ela subdividida na região, deve produzir um potencial de 22,5 unidades em todos os seus pontos. Daí, de duas alternativas, uma é válida: ou o potencial de 22,5 unidades está superestimado ou os potenciais nas subunidades 1 e 2 estão subestimados. Este é o segundo aspecto técnico que se deseja tratar.

Consultando o trabalho de Stewart e Warntz, verifica-se que o potencial de 22,5 unidades para a região como um todo está superestimado. Isto resultou do fato de não se ter modificado o valor de d_{ii} pelo coeficiente f. Para $\alpha/\beta = 5/2 = 2,5$, $f = 1,06$ e, então, $U_1 = 20/(0,89 \times 1,06) = 21,2$ unidades.

Da mesma forma, tanto U_1 como U_2 deverão ser ajustados. Para a subunidade 1, $f = 1,0$ para $\alpha/\beta = 1$ e para a subunidade 2, $f = 1,01$ para $\alpha/\beta = 3/2 = 1,5$. Então, $d_{ii} = (0,57)\ (1,0) = 0,57$ e $d_{22} = 0,69)\ (1,01) = 0,70$;

$$U_i = 18,8 \text{ como antes e } U_2 = \left(\frac{8}{2,5} + \frac{12}{0,70}\right) = (3,2 + 17,1) = 20,3$$

Verificamos, assim, que a discrepância decresce quando se leva em conta o fator de correção f, proposto por Stewart e Warntz (observação: a discrepância entre 20,6 e 20,3 é desprezível no caso de populações 8 e 12; considere, entretanto, os potenciais para 800 mil e 1.200 mil).

Consideremos, agora, uma outra subdivisão da região. Desta vez tomamos duas subunidades de igual área e igual população. Em outras palavras, fazemos a subdivisão aplicando o teorema de Borsuk. É simples imaginar que entre o infinito número de segmentos que, passando pelo centro de gravidade da região, a divide em duas subunidades de igual área, pelo menos um segmento também alocará a cada subunidade população igual à metade da população total.

|←—2,5—→|

2	$A_1b = 5$	$A_2 = 5$
	$P_1 = 10$	$P_2 = 10$

Para $\alpha/\beta = 2,5/2$, $f = 1,01$ e

$d_{11} = d_{22} = (1/2 \sqrt{5/3,14})\ (1,01) = 0,64$

$U_1 = U_2 = (10/2,5 + 10/0,64) = 19,6$

O que se tem aqui e qual o aspecto técnico a considerar? — O fato de não sabermos, com certeza, qual o valor mais exato do potencial em qualquer ponto de uma região. Deverá ser 18,8 unidades na parte da subunidade 1 ou deverá ser 20,3 unidades quando se considera a parte da subunidade 2. Chama-se a atenção de que o potencial, no final das contas, é o efeito de uma população total $P = 20$ sobre uma área $A = 10$. Neste caso, o valor mais provável é aquele que nos dá, aproximadamente, $U_i = 21,2$. Não diríamos que se escolheria, então, o valor de $U_i = 18,8$, pois que $U_2 = 20,3$ pode não ser, também, significativamente diferente de $U_i = 21,2$.

Nisto está o cerne do problema: a subdivisão de uma região deve ser tal que o conjunto de valores do potencial em cada subunidade obtida não seja significativamente diferente do valor do potencial estimado para a região como um todo.

O que se notou é que quando se dividisse a região em subunidades de igual área e igual população, obtivemos para o potencial $U_1 = U_2 = 19,6$. Que ocorrerá se tomamos três, quatro, etc., subdivisões de igual área e população?

Para o caso de três subdivisões, temos

	1,67	1,67	1,67
2	$A_1 = 3,33$	$A_2 = 3,33$	$A_3 = 3,33$
	$P_1 = 6,67$	$P_2 = 6,67$	$P_3 = 6,67$

|←—1,67—→|←—1,67—→|

Para $\alpha/\beta = 2/1,67 = 1,2$, $f = 1,01$

$d_{11} = d_{22} = d_{33} = (1/2 \sqrt{3,33/3,14})\ (1,01) = 0,52$

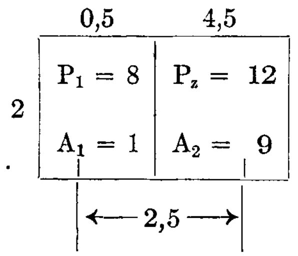
$$U_1 = \left(\frac{P_2}{d_{12}} + \frac{P_3}{d_{13}}\right) + \frac{P_1}{d_{11}} = \left(\frac{6,67}{1,67} + \frac{6,67}{3,33}\right) + \frac{6,67}{0,52} = (4+2) + 12,8 = 18,8$$

$$U_2 = \left(\frac{P_1}{d_{21}} + \frac{P_3}{d_{23}}\right) + \frac{P_2}{d_{22}} = \left(\frac{6,67}{1,67} + \frac{6,67}{1,67}\right) + \frac{6,67}{0,52} = (4+4) + 12,8 = 20,8$$

$$U_3 = \left(\frac{P_1}{d_{13}} + \frac{P_2}{d_{23}}\right) + \frac{P_3}{d_{33}} = \left(\frac{6,67}{3,33} + \frac{6,67}{1,67}\right) + \frac{6,67}{0,52} = (2+4) + 1,28 = 18,8$$

Nota-se que o valor do potencial na subunidade 2 é mais alto. Uma natural conseqüência do efeito combinado de influência de duas áreas, mais vizinhas delas que das subunidades extremas. Os resultados globais não são, entretanto, muito discrepantes do valor $U_i = 21{,}2$, para toda a região.

Tomemos, agora, um caso extremo. Imagine a região com duas subunidades de áreas 1 e 9 e populações 8 e 12.



Para $\alpha/\beta = 2/1 = , 2{,}0$. $f = 1{,}02$ e

$d_{11} = (1/2 \sqrt{1/3{,}14})\ 1{,}02) = 0{,}29$

Para $\alpha/\beta = 4/2 = 2{,}0$, $f = 1{,}02$ e

$d_{22} = (1/2 \sqrt{9/3{,}14})\ (1{,}02) = 0{,}86$

$$U_1 = \frac{12}{2{,}5} + \frac{8}{0{,}29} = 4{,}8 + 27{,}6 = 32{,}4$$

$$U_2 = \frac{8}{2{,}5} + \frac{12}{0{,}86} = 3{,}2 + 14{,}0 = 17{,}2$$

Aqui está o caso que deixa o usuário do modelo em dificuldade na interpretação: uma subunidade pequena, com população menor que a de outra subunidade de área bem maior, com um potencial *maior* que a subunidade de maior tamanho. É o que ocorre, por exemplo, quando se calcula o potencial de um município como São João de Meriti, numa região que contém o município do Rio de Janeiro.

Nos parece evidente que o valor $U_i = 32{,}4$ está superestimado e o valor $U_2 = 17{,}2$ está subestimado. Conseqüência da concentração pressuposta para a população de cada subunidade.

O problema técnico de interpretação reside justamente neste ponto: não se trata de determinar o potencial na subunidade apenas; trata-se de estimar valores do potencial em uma subunidade, de forma que estes valores não se diferenciam significativamente do potencial estimado quando se considera a região como um todo.

4. COMENTÁRIOS

4.1. Deve ser observado que o potencial estimado para cada uma de n unidades em que se divide uma região, leva em conta o efeito da *população total* da região, entretanto subdividida, alocada a cada subunidade. A imprópria alocação de partes da população total a subunidades altamente diferenciadas em área induz a dificuldade de interpretação e de discrepantes variações do potencial na região.

4.2. Discrepâncias sempre ocorrem quando não se leva em consideração o fator de correção das distâncias d_{ii}, conforme proposto por Stewart e Warntz.

4.3. A eliminação das discrepâncias parece ocorrer quando:

a) se introduz o fator de correção;

b) quando se considera a região subdividida em unidades de iguais áreas e de iguais populações; recomenda-se, portanto, a prévia aplicação do teorema de Borsuk, ignorando-se as subunidades político-administrativas, se for o caso.

4.4. Deve-se sempre ter em mente que o modelo não se propõe a estimar apenas o potencial em uma dada subunidade da região; *o modelo se propõe a expressar o valor do potencial da região como um todo.*

4.5. Não há nenhuma restrição de que, dada uma subdivisão político-administrativa com unidades a, b, c, d etc., e populações P_a, P_b, P_c, P_d, etc., o potencial, isto é, influência exercida, por *um* membro da população de P_a seja medida associando-o a área da unidade *a*; o que importa é a sua posição geográfica na região e, portanto, sua distância a todos os outros membros da população total $P_a + P_b + P_c + + \ldots = P$.

Teoricamente, portanto, se associação de membro da população à área deve ser considerada e se verifica que área é variável importante na estimativa da influência daquele componente da população sobre si mesmo, procede pressupor-se igual área para cada componente da população.

A variação ideal do potencial na região seria, então, obtida quando se considerasse a região subdividida em um número de unidades igual a população total da região. Seria absurdo considerar-se esta idealização livre de restrições: a existência de áreas não habitadas ou inabitáveis estabelece limites às observações aqui feitas; a concentração constatada, de numeroso agregado populacional em pequena área ou a dispersão de reduzido número de pessoas em amplas áreas, deve, obviamente, ser apropriadamente considerada.

4.6. Se posição geográfica é o fator mais importante, a aplicação do modelo potencial se processa sob condições mais favoráveis quando a população é representada por uma distribuição percentual.

Em geral, neste tipo de distribuição, um ponto representa um número $\times$ de habitantes. A proximidade dos pontos dá uma idéia da concentração ou da dispersão do agregado populacional.

BIBLIOGRAFIA

ABLER, Ronald; ADAMS, John S.; GOULD, Peter. *Spatial Organization,* Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1971.

ANAIS. I Curso de Especialização em Planejamento Urbano, p. 97, Recife, 1974.

LINDGREN, C. Ernesto S. *Análise de Dados,* Rio de Janeiro: COPPE, UFRJ, PDD.4/76 (2.ª edição), 1976.

LINDGREN, C. Ernesto S., e SLABY, Steve M. *Four-Dimensional Descriptive Geometry,* New York: MacGraw-Hill Book Co., p. 55, 1968.

STEINHAUS, Hugo. Sur la division des ensembles de l'espace par les plans et des ensembles plans par les cercles, *Fundamenta Mathematica,* vol. 33, pp. 245-263, 1945.

STEWART, J. Q. e WARNTZ, WILLIAM. *The Geographical Review,* Macrogeography and Social Science, vol. 48, n.º 2, 1958.

STONE, A. H. e TUKEY, J. W. *Duke Mathematical Journal,* 9, pp. 356-359, 1942.

WARNTZ, William, LINDGREN, C. Ernesto S.; BONFIGLIOLI, Luisa; LOZANO, Eduardo; KIERNAN, Katherine. *The Sandwich Theoreme — a Basic on for Geography,* Cambridge: Harvard University, Graduate School of Design, 1971.