


# Representação Gráfica de uma Matriz de Distâncias Sociais\*

C. ERNESTO S. LINDGREN E CARL STEINITZ

## INTRODUÇÃO

 O algoritmo sugerido neste trabalho se propõe solucionar um problema típico em desenho urbano — a alocação de um conjunto de espaços funcionais, com demandas locais, relativos uns aos outros. O problema é análogo ao de localizar entre um conjunto de estruturas existentes, como por exemplo em um complexo universitário, um novo pavilhão de ciências, um dormitório para alunos, um ginásio, uma piscina etc. Uma solução que se poderia adotar é a de recortar retângulos de papel colorido representando o espaço funcional em questão e procurar ajustá-los ao espaço físico disponível.

O problema é definido como se segue e leva em consideração os seguintes pressupostos:

1. Os espaços funcionais são entidades mutuamente exclusivas;
2. É feita uma distinção entre espaços funcionais “fixos” (aqueles que já existem em espaço bi ou tridimensional e assumidos assim permaneceram) e os espaços funcionais “flutuantes” (os novos espaços funcionais cujas localizações são as variáveis na solução);

---

\* Transbordo de edição mimeografada da COPPE (UFRJ) (maio/75). O texto foi publicado originalmente em decorrência do convênio entre a COPPE, o Ministério do Interior e a Secretaria de Planejamento da Presidência da República que financia o Programa de Planejamento Urbano e Regional.

Tradução de C. ERNESTO S. LINDGREN, professor titular do Curso de Planejamento Urbano e Regional (COPPE/UFRJ). Título do original: “Graphical Representation of a Matrix with Applications in Spatial Location”, por C. Ernesto S. Lindgren e Carl Steinitz, Center for Environmental Studies, Graduate School of Design, Harvard University. Harvard Papers in Theoretical Geography, “Geography and the Properties of Surfaces” Series, Paper Number Thirty-Three, 30 de outubro de 1969, Thirty Third Technical Report-Office of Naval Research — Contract N.º 00014-67 A-0298.

3. As inter-relações entre espaços fixos e flutuantes são expressas em uma única matriz numérica, representando as “distâncias sociais” entre os espaços. Entende-se por “distância social” um valor numérico que leva em consideração um conjunto de características mensuráveis em cada espaço, fixo ou flutuante;

4. A matriz acima mencionada pode servir de base para a avaliação de quaisquer outras soluções alternativas, independentemente de como estas tenham sido propostas;

5. Uma solução “ótima”, necessariamente, envolve concessões. O projetista deve compreender as vantagens e as desvantagens das estratégias de concessões a ele disponíveis. Estas, por sua vez, são função da geometria  $N$ -dimensional que deve ser utilizada no processo de solução. Se todos os espaços são flutuantes, como seria no caso de um inteiramente novo complexo de edificações, sem a presença de restrições locais, a solução ainda assim envolve a seleção de estratégias de concessões, que podem ser, entretanto, expressas em  $(N-1)$  dimensões. A melhor solução é aquela que, quando projetada em duas ou três dimensões, produz um desvio mínimo da matriz de entrada inicial. Se, entretanto, alguns espaços são fixos, é necessário que o colapso do espaço de  $(N-1)$  dimensões aloca estes pontos fixos na sua posição original. Uma combinação de espaços fixos e flutuantes é tomada como o caso geral do problema;

6. O algoritmo consiste na representação gráfica da matriz de distâncias sociais;

7. Um espaço funcional é representado pelo elemento geométrico, ponto, e sua coordenação é feita em espaço euclidiano. Refere-se, portanto, a “pontos fixos” e a “pontos flutuantes”;

8. A representação gráfica da matriz, expressando as inter-relações entre pontos fixos e pontos flutuantes, serve como um passo em direção a um processo de otimização da matriz. Vários pressupostos e decisões devem ser feitos e tomados pelo projetista com relação ao colapso do espaço multidimensional, onde os pontos são relacionados, sobre o espaço definido pelos pontos fixos;

9. Porque várias alternativas se apresentam, parece razoável não levar em consideração a verdadeira dimensionalidade do espaço geométrico requerido e combinar os pontos fixos (usualmente definindo um espaço bidimensional) com dois dos  $K$  pontos flutuantes. Assim, operará sempre em um espaço tetradimensional. Utilizando este procedimento, uma seqüência de otimização de matrizes pode ser postulada;

10. Sob estas condições, o processamento eletrônico do algoritmo seria simplificado. Outra vantagem seria a possibilidade de mudar o método de obter o colapso dos pontos flutuantes (localizados em espaço tetradimensional) sobre o plano dos pontos fixos. Colapso, neste caso, trata-se simplesmente da projeção de pontos em espaço tetradimensional (4-D) sobre um plano fixo (bidimensional ou espaço 2-D). Como a direção da projeção pode variar de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , assumindo projeção cilíndrica, a otimização torna-se uma ferramenta efetiva, ao contrário das condições não controláveis de processo randômico.

O trabalho está dividido em cinco partes. A *Primeira Parte* trata da questão da dimensionalidade do espaço geométrico em que se representam os pontos fixos e flutuantes. A *Segunda Parte* introduz brevemente as considerações básicas de um método geométrico de representação gráfica de formas geométricas, em espaço tetradimensional. Este

método é, entretanto, considerado como conhecido e disponível para utilização, em vista de terem Lindgren e Slaby (1968) e Lindgren (1964a, 1964b, 1964c, 1964d, 1965a, 1965b, 1965c, 1965d, 1965e, 1965f, 1965g, 1965h, 1965i) discutido em detalhe, em trabalhos publicados, as considerações teóricas para a geometria descritiva tetradimensional. Sem restrições, fazemos uso da metodologia apresentada na referida bibliografia. A *Terceira Parte* trata da conceituação de distância social e dos efeitos que tem em problemas de localização espacial. Mostra-se, em seguida, a organização da matriz de distância, cuja representação gráfica é obtida utilizando-se a metodologia indicada na *Segunda Parte* do trabalho. A *Quarta Parte* contém uma descrição do algoritmo propriamente dito, introduzindo-se um exemplo ilustrativo. Finalmente, na *Quinta Parte* tecem-se considerações gerais sobre outras aplicações do algoritmo proposto neste trabalho.

## PRIMEIRA PARTE

### 0 Problema da Dimensionalidade

Dada uma matriz ( $n \times n$ ) cujos elementos expressam “distância” entre  $n$  pontos ou elementos, necessitamos de um método geométrico de representação em um espaço de  $(n - 1)$  dimensões se, para uma combinação de quaisquer três elementos  $i, j, k$ , na matriz, a condição abaixo for satisfeita,

$$L_i + L_j > L_k \text{ para } i = 1, n; j = 1, n; k = 1, n; i \neq j \neq k$$

assumindo-se que um quarto elemento  $p$  não pertence ao plano definido pelos elementos  $i, j$  e  $k$ , ou, geralmente, que um elemento qualquer não pertence ao espaço dos demais  $(n - 1)$  elementos.

Caso a condição acima não seja satisfeita em uma qualquer triada de pontos, a dimensionalidade do espaço será reduzida de uma dimensão. Entretanto, se duas, três ou  $K$  triada de pontos não satisfazem a condição, tal não implica numa redução da dimensionalidade do espaço de duas, três ou  $K$  dimensões. A dimensionalidade do espaço é função do número de pontos que determinam triadas, satisfazendo a condição menos um.

Assim, seja  $T$  o número total de triadas e  $K$  o número de triadas que não satisfazem a condição. O número de triadas satisfazendo a condição é  $S = T - K$ . O número total de triadas  $S$  é dado por

$$S = C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}$$

onde  $m$  é o número de pontos, sendo  $(m - 1)$  a dimensionalidade do espaço. Naturalmente,

$$T = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

A dimensionalidade do espaço pode ser, e usualmente o é, reduzida, levando-se em consideração que alguns elementos na matriz expressam relações entre pontos que são considerados fixos durante qualquer trans-

formação da matriz. Por exemplo, se tais elementos são distâncias entre edificações ou objetos existentes, estas distâncias permanecem constantes. Em consequência, a dimensionalidade do espaço e da geometria euclidiana correspondente pode ser reduzida de um valor igual ao número de elementos fixos na matriz.

Seja então ( $n \times n$ ) a matriz de distâncias entre  $n$  elementos,  $f$  o número de elementos fixos, originando assim uma matriz de distâncias ( $f \times f$ ),  $g$  o número de elementos flutuantes, originando uma matriz de distâncias ( $g \times g$ ). Então,  $f + g = n$ .

Podemos assumir que os  $f$  pontos fixos pertencem a um único plano e, assim, a dimensionalidade, acima de três, do espaço e da geometria é estimada em função de  $g$ . Se a matriz é ( $g \times g$ ), o espaço requerido e a geometria euclidiana correspondente é  $g$ -dimensional. As relações envolvendo as tríadas de pontos são analisadas nesta matriz ( $g \times g$ ) e qualquer redução da dimensionalidade do espaço e da geometria é estimada determinando-se o número de tríadas que não satisfazem a condição estabelecida.

$$T_G = C_g^3 = \frac{g(g-1)(g-2)}{3!}$$

é o número total de tríadas envolvendo  $g$  pontos. Se  $K_G$  é o número de tríadas que não satisfazem a condição,  $S_G = (T_G - K_G)$ , onde  $S_G$  é o número de tríadas satisfazendo a condição. A dimensionalidade do espaço e da geometria é ( $r - 1$ ), onde  $r$  é estimado a partir de

$$S_G = \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}$$

Evidentemente, nenhuma redução da dimensionalidade pode ser feita através de uma investigação das relações entre os pontos fixos. Considera-se que estes pontos pertencem a um plano, ou por eles determinado ou simplesmente assumindo a existência de um plano para o caso em que os elementos existentes sejam colineares.

## SEGUNDA PARTE

### Um Método de Representação Gráfica de Formas Geométricas Tetradimensionais

Lindgren e Slaby (1968) e Lindgren (1964a, b, c, d, 1965a, b, c, d, e, f, g, h, i) discutem em detalhe os chamados métodos "tipo mongeano" e "direto" para a geometria descritiva tetradimensional. Sumariamos aqui os principais pressupostos do método tipo mongeano e as principais relações espaciais entre formas geométricas tetradimensionais, apontando como as mesmas se representam em épura. Certamente um método de geometria descritiva tetradimensional fundamenta-se nos conceitos da geometria sintética tetradimensional e, assim, iniciamos a discussão com uma breve introdução às relações sintéticas.

Para facilitar o acompanhamento da apresentação, adiantamos que utilizamos o seguinte glossário de símbolos e abreviações.

*Abreviações:*

3 — D: espaço euclidiano tridimensional.

4 — D: espaço euclidiano tetradimensional.

*Glossário\*:*

*letra minúscula*, entre parêntesis, identifica um ponto: pontos (a), (b), (c) etc.;

*letra maiúscula*, entre parêntesis, identifica uma reta: retas (A), (B), (C) etc.;

*letra minúscula grega*, sem parêntesis, identifica um plano:  $\pi$ ,  $\theta$ ,  $\eta$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , etc.;

*letra minúscula grega*, sem parêntesis, com subscripto, identifica traços de um espaço tridimensional em um elemento do sistema de referência:  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ , etc.;

*letra maiúscula grega*, sem parêntesis, identifica um espaço tridimensional: espaços  $\Gamma$ ,  $\Omega$ ,  $\Lambda$ ,  $\Delta$ ,  $\Sigma$ , etc.;

x indica a interseção de dois elementos geométricos: (R) x (L);

$\Gamma \times \Omega$ ;  $\gamma \times \beta \times \alpha$ ;

$\rightrightarrows$  indica o resultado de uma interseção:

$\gamma \times \beta \times \alpha \rightrightarrows (a)$ ;  $(R) \times (L) \rightrightarrows (b)$ ;  $\Gamma \times \Omega \rightrightarrows \mu$ ;

$\rightarrow$  indica que um elemento geométrico é definido por dois outros ou que um elemento geométrico pertence a outro:

(ab)  $\rightarrow$  (R) indica que os pontos (a) e (b) determinam a reta (R);  $\alpha\beta \rightarrow \Gamma$  indica que os planos  $\alpha$  e  $\beta$  determinam o espaço tridimensional  $\Gamma$ ;

$\omega \rightarrow \Lambda$  indica que o plano  $\omega$  pertence ao espaço tridimensional  $\Lambda$ .

$\perp$  perpendicular (retas, planos, espaços tridimensionais);

$\nabla$  absolutamente perpendicular (relaciona-se a dois planos apenas);

$\parallel$  paralelo;

$\perp$  retas, planos, espaços tridimensionais formando ângulo diferente de  $90^\circ$ .

Vários conceitos e noções relativas à síntese de elementos geométricos em espaço tetradimensional, bem como a postulação do próprio conceito de “espaço tetradimensional” como elemento geométrico, não são aqui considerados por se tratar de assuntos específicos da geometria sintética, fora, portanto, do escopo deste trabalho. Mencionamos, entretanto, aqueles teoremas de geometria sintética de significante importância para as relações espaciais que são introduzidas tanto na descrição do sistema de referência para a representação gráfica como na elaboração da estrutura geométrica correspondente ao proposto algoritmo. São as seguintes as observações e teoremas, seguidos de uma breve des-

\* As notações abaixo aplicam-se apenas a esta Segunda Parte do trabalho. Na Quarta Parte, onde o algoritmo é introduzido, não seguimos a notação, tendo em mente facilitar a programação em linguagem FORTRAN.

criação do sistema de referência para a geometria descritiva tetradimensional e da representação em épura de relações espaciais em espaço tetradimensional.

*Observações:*

1. Considera-se a existência geométrica de mais de um espaço tridimensional euclidiano;

2. A existência geométrica de um espaço tetradimensional euclidiano evidencia-se em virtude da observação acima, pois dois espaços de mesma dimensão  $m$  só podem coexistir em um espaço com dimensão mínima  $m + 1$ ;

3. Em cada espaço tridimensional observam-se relações entre pontos, retas e planos a ele pertencentes, obedecendo aos princípios da geometria sintética euclidiana.

*Teoremas:*

1. Uma reta corta um plano ou um espaço tridimensional ao qual não pertence, em um ponto;

2. Um plano corta um espaço tridimensional ao qual não pertence, em uma reta;

3. A interseção de dois planos não pertencentes ao mesmo espaço tridimensional é um ponto, próprio ou impróprio. Se o ponto é impróprio os dois planos são semiparalelos;

4. A interseção de dois espaços tridimensionais é um plano, próprio ou impróprio. Se o plano é impróprio os dois espaços são paralelos;

5. Uma reta paralela a um espaço tridimensional é paralela a todas as retas e a todos os planos pertencentes ao espaço;

6. Um plano paralelo a um espaço tridimensional é paralelo a todas as retas e a todos os planos pertencentes ao espaço;

7. Dois planos são simplesmente perpendiculares quando o ângulo diedro por eles formado é igual a  $90^\circ$  e pertencem ao mesmo espaço tridimensional (neste trabalho a referência a "planos perpendiculares" indica esta situação);

9. Dois planos que não pertencem ao mesmo espaço e que se cortam em um ponto formam dois ângulos. Quando ambos os ângulos são iguais a  $90^\circ$ , os planos são absolutamente perpendiculares;

10. Um plano perpendicular a um espaço tridimensional é absolutamente perpendicular a todos os planos pertencentes ao espaço;

11. Todas as retas de quaisquer um de dois planos absolutamente perpendiculares são perpendiculares a todas as retas do outro, que passam pelo ponto de interseção dos dois planos, e ortogonais às demais;

12. A projeção, cônica ou paralela, de um ponto sobre um espaço é um ponto pertencente ao espaço.

## Geometria Descritiva Tetradimensional

### a. O sistema de referência.

Constitui-se o sistema de referência de quatro espaços tridimensionais, mutuamente perpendiculares. Tomados três a três, determinam quatro retas mutuamente perpendiculares, pertencentes a um ponto. As quatro retas, tomadas em pares, determinam seis planos que, tomados em grupos de três, são mutuamente perpendiculares e pertencem à mesma reta, mas não pertencem a um mesmo espaço tridimensional. A figura 1 indica as relações entre os elementos do sistema de referência.

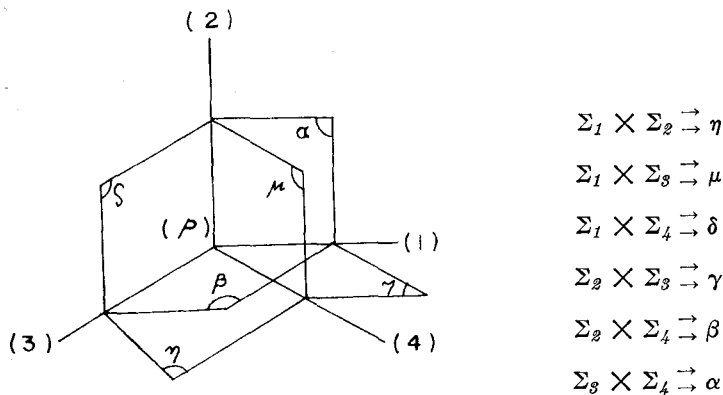


Fig. 1

$$1. \Sigma_1 \perp \Sigma_2; \Sigma_1 \perp \Sigma_3; \Sigma_1 \perp \Sigma_4; \Sigma_2 \perp \Sigma_3; \Sigma_2 \perp \Sigma_4; \Sigma_3 \perp \Sigma_4$$

$$\Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \Sigma_3 \rightarrow (4)$$

$$\Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \Sigma_4 \rightarrow (3)$$

$$\Sigma_1 \times \Sigma_3 \times \Sigma_4 \rightarrow (2)$$

$$\Sigma_2 \times \Sigma_3 \times \Sigma_4 \rightarrow (1)$$

$$(1) \times (2) \times (3) \times (4) \rightarrow \text{ponto } (\rho)$$

$$2. (123) \rightarrow \Sigma_4$$

$$(124) \rightarrow \Sigma_3$$

$$(134) \rightarrow \Sigma_2$$

$$(234) \rightarrow \Sigma_1$$

$$3. (12) \rightarrow \alpha; (13) \rightarrow \beta; (14) \rightarrow \gamma; (23) \rightarrow \delta; (24) \rightarrow \mu; (34) \rightarrow \eta$$

$$\alpha\beta\delta \rightarrow \Sigma_4 (\alpha \perp \beta; \alpha \perp \gamma; \beta \perp \delta)$$

$$\alpha\gamma\mu \rightarrow \Sigma_3 (\alpha \perp \gamma; \alpha \perp \mu; \gamma \perp \mu)$$

$$\beta\gamma\eta \rightarrow \Sigma_2 (\beta \perp \gamma; \beta \perp \eta; \gamma \perp \eta)$$

$$\delta\mu\eta \rightarrow \Sigma_1 (\delta \perp \mu; \delta \perp \eta; \mu \perp \eta)$$

b. Representação de ponto, reta, plano e espaço tridimensional.

*Ponto*

Pertencente ao espaço tetradimensional, é unicamente localizado por suas distâncias em relação aos quatro espaços do sistema de referência. A distância entre o ponto e um espaço é igual à distância entre o ponto e sua projeção cilíndrica-ortogonal sobre o espaço. Demonstra-se que a projetante do ponto sobre um espaço do sistema de referência é paralela à interseção dos outros três espaços. Esta consideração torna-se importante para a introdução da operação geométrica que conduz a representação do ponto, por suas projeções, em *épura plana*.

A figura 1 mostra que cada grupo de três retas do sistema de referência determina um espaço e constitui-se em um sistema ortogonal cartesiano ou, considerando-se os três planos que também determinam, em um sistema de referência mongeano. Assim, obtida a projeção do ponto em um espaço, procede-se com o tratamento desta projeção como ponto pertencente à espaço tridimensional. Este ponto-projeção é então referido ao sistema mongeano.

A consideração simultânea das projeções do ponto sobre os quatro espaços do sistema de referência produz as relações pictorialmente indicadas na figura 2.

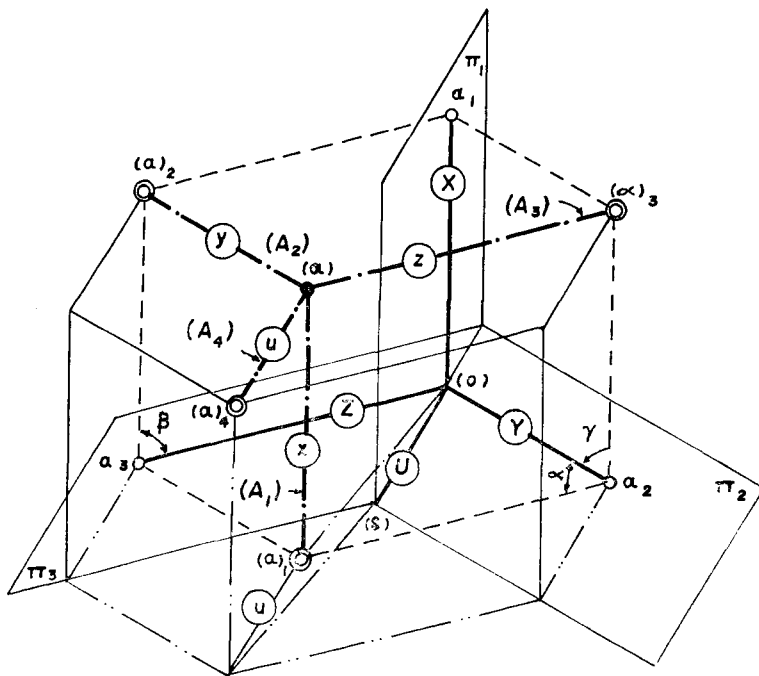


Fig. 2

- (a): ponto no espaço 4-D
- (a)<sub>1</sub>, (a)<sub>2</sub>, (a)<sub>3</sub>, (a)<sub>4</sub>: projeções de (a) em Σ<sub>1</sub>, Σ<sub>2</sub>, Σ<sub>3</sub>, Σ<sub>4</sub>
- a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>: projeções de (a)<sub>1</sub>, (a)<sub>2</sub>, (a)<sub>3</sub> em π<sub>1</sub>, π<sub>2</sub>, π<sub>3</sub>
- (a) - (a)<sub>1</sub>: distância de (a) à Σ<sub>1</sub>
- (a) - (a)<sub>2</sub>: distância de (a) à Σ<sub>2</sub>
- (a) - (a)<sub>3</sub>: distância de (a) à Σ<sub>3</sub>
- (a) - (a)<sub>4</sub>: distância de (a) à Σ<sub>4</sub>



A introdução de operadores geométricos (rotação de espaços e planos até suas superposições) produz a representação do ponto, em épura, conforme o indicado na figura 3.

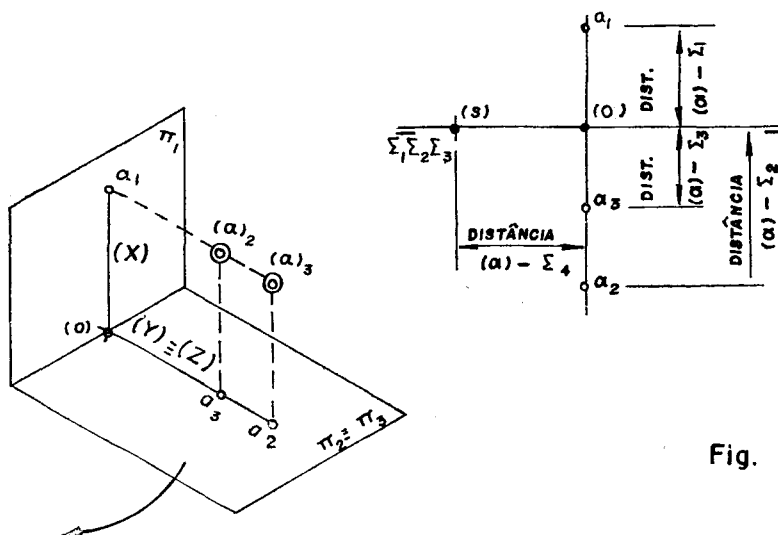


Fig. 3

### Reta e Plano

A representação de retas e planos é aqui tratada, genericamente, sob a consideração da representação de dois ou três pontos que determinam a reta ou o plano, respectivamente. Existem várias particularidades correspondentes a traços de retas e de planos nos elementos do sistema de referência, bem como a posições peculiares que uma reta ou um plano ocupa com relação aos mesmos elementos. Estas particularidades e peculiaridades não são aqui tratadas por estarem fora do escopo deste trabalho.

### Espaço 3—D

A forma de representação mais simples de um espaço tridimensional é pelos seus traços nos planos do sistema de referência. Estes traços correspondem, por sua vez, aos traços de cada plano de interseção do espaço dado com os espaços do sistema de referência.

A figura 4 indica a representação, em épura, de um espaço  $\mathcal{T}$ .

### Condições de Pertinência e Representação em Épura de Relações Entre Reta, Plano e Espaço 3—D

Todas as condições de pertinência observadas, em épura, no método mongeano tridimensional estendem-se ao caso do método tipo mongeano tetradimensional. Isto decorre em vista de, neste caso, operar-se simultaneamente com três sistemas de referência tridimensionais. Conseqüentemente, as condições de paralelismo e perpendicularismo entre reta, plano e espaço expressam-se em acordo com a simultaneidade de operação com os três sistemas de referência tridimensionais. Portanto, por exemplo, retas paralelas têm projeções de mesmo "nome" paralelas; as projeções de uma reta perpendicular a um espaço 3—D são perpendiculares aos traços do espaço nos elementos do sistema de referência etc.

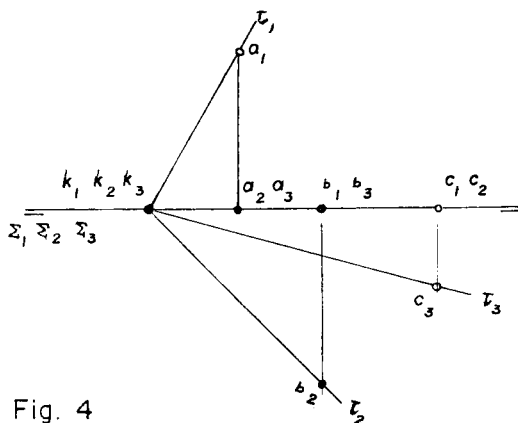


Fig. 4

1. A interseção do espaço  $T$  com o espaço  $\Sigma$  determina o plano  $\alpha$  representado pelos traços  $T_2$  e  $T_3$  nos planos  $\pi_2$  e  $\pi_3$ .
2. A interseção do espaço  $T$  com o espaço  $\Sigma_2$  determina o plano  $\beta$  representado pelos traços  $T_2$  e  $T_3$  nos planos  $\pi_1$  e  $\pi_3$ .
3. A interseção do espaço  $T$  com o espaço  $\Sigma_3$  determina o plano  $\gamma$  representado pelos traços  $T_2$  e  $T_3$  nos planos  $\pi_2$  e  $\pi_3$ .

Esta breve discussão do método de representação de formas geométricas tetradimensionais é aqui encerrada, por ser considerada suficientemente informativa sobre a metodologia na qual se firma o proposto algoritmo de localização espacial.

## TERCEIRA PARTE

### Distância Social: Conceituação

No grupamento de unidades taxonômicas operacionais, na proposição de modelos de estrutura física de cidades, na verificação da existência ou não existência de interação entre grupos estratificados segundo características socioeconômicas e em outras questões que pressupõem uma “separação” entre unidades taxonômicas, unidades componentes da morfologia de cidades, classes sociais etc., necessário se torna definir, operacionalmente, o conceito de “separação” ou, conforme a nomenclatura já universalmente adotada, distância social. Um exemplo de como esta operacionalização é feita aplica-se a todas as demais situações.

Seja, pois, o caso de grupamento de unidades taxonômicas. Abler, Adams e Gould (1971) chamam atenção para o fato de que grupos são comumente compreendidos como nucleação de eventos, objetos ou pessoas, sendo definidos em termos de similaridade ou proximidade de seus membros. Proximidade, por sua vez, é geralmente definida em termos de distância física entre objetos, se for este o caso. Similaridade é definida em termos de diferença entre o número de unidades que são associadas a cada membro do grupo como resultado da mensuração de uma característica qualquer observável em cada membro. Por exemplo, os grupamentos de pessoas em faixas etárias, ou níveis de renda, ou em níveis educacionais etc., são baseados nas diferenças entre idade, renda e escolaridade de cada membro da população sendo grupada. Quanto menor a diferença entre dois membros, com respeito ao número de unidades que representam a característica, mais similares são eles.

Conforme a conceituação acima, a formação de grupos torna-se simples quando são eles obtidos em função de uma variável como distância física, idade, renda ou outra característica observável e mensurada em todos os membros da população. Tem-se, neste caso, um procedimento que se diz unidimensional ou, em linguagem da taxonomia, uma classificação em espaço taxonômico unidimensional. Abler, Adams e Gould (1971) argumentam não haver razão para esta unidimensionalidade. A introdução de duas, três ou mais variáveis permite, pois, classificação em espaços taxonômicos de duas, três ou mais dimensões. Certamente isto se torna necessário a fim de que grupos sejam formados em função, por exemplo, de renda, nível educacional, nível ocupacional etc. Para se alcançar este objetivo, dados os valores numéricos que correspondem às mensurações de cada característica sendo considerada para a taxonomia, determina-se um valor  $d$  em função dos valores numéricos fornecidos. Sendo, por exemplo,  $M$ ,  $N$  e  $P$ , três membros de uma população (de pessoas, objetos, eventos etc.), a cada um correspondendo um número  $n$  finito de características ( $C_a$ ,  $a = 1, n$ ), estimam-se os valores

$$d_{MN} = f(C_a^M, C_a^N, a = 1, n),$$

$$d_{MP} = f(C_a^M, C_a^P, a = 1, n) \quad \text{e} \quad d_{NP} = f(C_a^N, C_a^P, a = 1, n).$$

A decisão sobre a possibilidade de nucleação de  $M$ ,  $N$  e  $P$  formando grupos tais como  $MNP$ ,  $MN$ ,  $MP$  ou  $NP$ , dependerá da diferença entre  $d_{MN}$ ,  $d_{MP}$  e  $d_{NP}$ . Ao valor  $d$  chamamos de “distância social”, pois expressa o grau de interação entre elementos de uma população em função de características físicas, sociais e econômicas observadas e mensuradas em cada elemento.

Duas possibilidades se apresentam para o cálculo de  $d$ . Abler, Adams e Gould, por exemplo, sugerem utilizar a expressão pitagoreana

$$(1) \quad d_{ij} = \left( \sum_{a=1}^n (\Delta C_a)^2 \right)^{0,5}, \quad i = j = 1, N; \quad i \neq j$$

onde  $N$  é o número de elementos de população.

Uma segunda alternativa seria utilizar

$$(2) \quad d_{ij} = \left( \sum_{a=1}^n \left( \Delta \frac{C_a}{\sum C_a} \right)^2 \right)^{0,5}, \quad i = j = 1, N; \quad i \neq j$$

isto é,  $d_{ij}$ , a distância social do elemento  $i$  ao elemento  $j$  é calculada em função da distribuição percentual do total de uma característica  $C_a$  em uma população. Esta segunda alternativa tem por objetivo minimizar o efeito de grandes valores numéricos correspondentes a determinada característica. No seguinte exemplo,  $d_{ij}$  são estimados utilizando-se as duas expressões.

Sejam  $M$ ,  $N$  e  $P$  três elementos de uma população. Sejam renda, nível educacional e nível ocupacional três características que se dispõe para o cálculo da distância social. A tabela 1 indica as mensurações obtidas e o tratamento que se dá a estas mensurações. Por exemplo, na tabela 2 passamos a nos referir a *unidades* de renda, *unidades* de nível educacional e *unidade* de nível ocupacional. Isto é feito a fim de eliminar o problema de análise dimensional. Tal é necessário quando o cálculo de  $d_{ij}$  é feito segundo a primeira alternativa. Na segunda alternativa este problema fica automaticamente solucionado.

Tabela 1

ELEMENTO	RENDA MENSAL	NÍVEL EDUCACIONAL (Anos de Educação)	NÍVEL OCUPACIONAL (Escala Social)
M	5.000	17	Engenheiro 9
N	8.000	18	Médico 10
P	6.000	16	Dentista 8

Tabela 2

ELEMENTO	UNIDADES DE RENDA		UNIDADES DE NÍVEL EDUCACIONAL		UNIDADES DE NÍVEL OCUPACIONAL	
	Absoluto	Percentagem	Absoluto	Percentagem	Absoluto	Percentagem
M	5.000	26	17	33	9	33
N	8.000	42	18	35	10	37
P	6.000	32	16	32	8	30

$$\Sigma = 19000 \quad \Sigma = 100 \quad \Sigma = 51 \quad \Sigma = 100 \quad \Sigma = 27 \quad \Sigma = 100$$

Aplicando a expressão (1) teremos

$$d_{MN} = \sqrt{(5000 - 8000)^2 + (17 - 18)^2 + (9 - 10)^2}$$

$$d_{MP} = \sqrt{(5000 - 6000)^2 + (17 - 16)^2 + (9 - 8)^2}$$

$$d_{NP} = \sqrt{(8000 - 6000)^2 + (18 - 16)^2 + (10 - 8)^2}$$

$$d_{MN} \simeq 3.000$$

$$d_{MP} \simeq 1.000$$

$$d_{NP} \simeq 2.000$$

Aplicando a expressão (2) teremos

$$d_{MN} = \sqrt{(26 - 42)^2 + (33 - 35)^2 + (33 - 37)^2}$$

$$d_{MP} = \sqrt{(26 - 32)^2 + (33 - 32)^2 + (33 - 30)^2}$$

$$d_{NP} = \sqrt{(42 - 32)^2 + (35 - 32)^2 + (37 - 30)^2}$$

$$d_{MN} \simeq 16,6$$

$$d_{MP} \simeq 6,8$$

$$d_{NP} \simeq 12,6$$

Observe-se que há uma mudança acentuada com relação às distâncias sociais entre os elementos. No caso da utilização da expressão (1) estas distâncias estão claramente determinadas mais em função da característica "renda" que das outras duas, enquanto que no caso da aplicação da expressão (2) a influência das demais características se faz sentir. Parece-nos evidente, portanto, que o cálculo de distâncias sociais onde se leva em consideração o simples valor absoluto do número de unidades associadas a uma mensuração, pode induzir a uma classificação em espaço taxonômico unidimensional, caso este número de unidades seja muito maior que o número de unidades associadas a outra ou outras características. O cálculo do percentual destas unidades parece produzir resultados mais coerentes.

Seja então, referindo-nos ao que é discutido na Introdução, uma matriz de distâncias sociais entre espaços funcionais considerados como entidades mutuamente exclusivas. Consideramos como problema fundamental o pressuposto 4 ali indicado e que é:

— A matriz pode servir de base para a avaliação de quaisquer outras alternativas, independentemente de como estas tenham sido propostas.

Este pressuposto, no contexto do planejamento urbano, refere-se à localização espacial dos espaços funcionais (objetos, pessoas etc.), cujas distâncias sociais são os elementos da matriz.

O objeto deste trabalho é, então, a proposição de um algoritmo que permita a transformação da matriz de distâncias sociais em uma que leve em consideração as adaptações locacionais, que devem ser tomadas em conta quando um ou mais espaços funcionais são introduzidos no universo de espaços funcionais existentes. Em um exemplo, para situar a questão, dado um complexo universitário, com suas edificações para salas de aula, escritórios para professores, funcionários, administração, campos de esporte, praças etc., onde se situaria um novo dormitório para alunos, ou um complexo para prática de esportes etc.?

Na solução de tal problema considerar-se-ia, conforme a proposição deste trabalho:

1. O tratamento de cada uma das unidades acima como um espaço funcional, existente (fixo) ou novo (flutuante);

2. A identificação das características peculiares a cada espaço, isto é, aquelas que estão ligadas a ele por razão de sua própria função;

3. O cálculo das distâncias sociais entre os espaços e organização de uma matriz destas distâncias;

4. A verificação da viabilidade estrutural desta matriz e sua transformação, se necessária, conforme o discutido na Primeira Parte deste trabalho.

O problema de representação e transformação da matriz torna-se objeto da discussão na Quarta Parte deste trabalho.

## QUARTA PARTE

### Representação Gráfica de uma Matriz de Distâncias Sociais: Um Algoritmo

A seguinte descrição do algoritmo é feita com dois objetivos. Primeiro, considera a viabilidade estrutural, em espaço tetradimensional, de uma forma geométrica construída a partir das distâncias sociais fornecidas na matriz. Segundo, desenvolve-se de forma seqüencial para uma lógica preparação de programa que permita a obtenção da matriz trans-

		PONTOS FIXOS				PONTOS FLUTUANTES				
		1	2	...	k	m	n	...	w	
		A	B	...	K	M	N	...	W	
PONTOS FLUTUANTES	x	1	A	0						
		2	B		0					
		:	:			0				
		:	:				0			
		k	K							
		m	M					0		
		n	N						0	
		:	:							0
w	W								0	

**MATRIZ DE DISTÂNCIAS SOCIAIS**  
( Matriz de Insumo )

formada e que leva em consideração as concessões que se fizerem necessárias. Concluímos o trabalho com um exemplo simples, solucionado com uma construção gráfica. É de se crer que o custo de programação do algoritmo será alto e só uma análise de seu uso poderia justificar o investimento inicial. Por esta razão não tentamos desenvolver o pro-

grama, em vista da não disponibilidade dos recursos necessários para tal empreendimento. A descrição aqui apresentada corresponde ao *flow chart* que comumente se utiliza em programação.

Seja dada a matriz de insumo onde estão indicados os pontos fixos e os pontos flutuantes. Conforme o já especificado, pontos fixos são aqueles representativos de espaços funcionais existentes. Pontos flutuantes representam novos espaços funcionais que se relacionam com os pontos fixos.

1. Dados os pontos fixos é sempre possível construir o polígono convexo ( $AB \dots K$ ).

2. Neste polígono, um ou mais pontos podem pertencer ao segmento determinado por dois deles. Isto ocorrerá quando três pontos não determinam um triângulo.

*Exemplos (Figuras 5 e 6):*

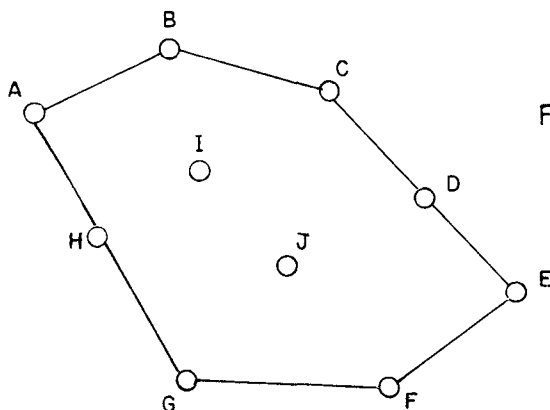


Fig. 5

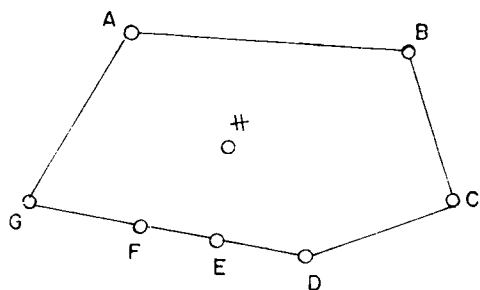


Fig. 6

3. É necessário, portanto, verificar a existência de colinearidade de pontos fixos. Isto é feito tomando-se três elementos  $1'$ ,  $1''$  e  $1'''$  da matriz de insumo e verificando-se as relações abaixo:

a) se

$$1' + 1''' > 1''$$

$$1' + 1'' > 1'''$$

$$1'' + 1''' > 1'$$

os três pontos determinam um triângulo

b) se

$$1' + 1'' = 1'''$$

ou

$$1' + 1''' = 1''$$

ou

$$1'' + 1''' = 1'$$

os três pontos são colineares

4. Na construção que se segue interessa-nos apenas os pontos que são vértices ou que se encontram no interior do polígono. Entretanto, informações relativas a pontos situados em lados do polígono são retidas.

5. No caso da figura 5, interessa-nos o polígono abaixo (figura 7)

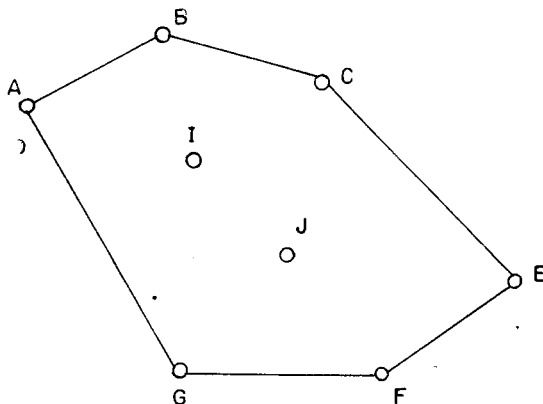


Fig. 7

6. Em seguida, aplicamos aos pontos flutuantes o procedimento especificado no item 3.

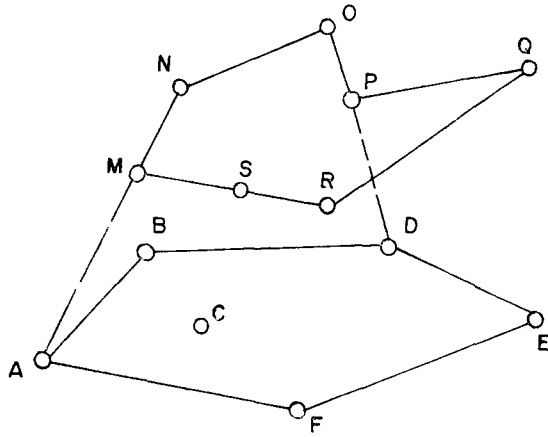
7. Ao término desta análise inicial temos dois polígonos (figura 8)

a) Um polígono plano determinado por pontos fixos. Este polígono poderá conter um ou mais pontos fixos pertencendo a lados do polígono. Poderá conter, também, pontos fixos localizados em seu interior.

b) Um polígono espacial determinado pelos pontos flutuantes. Este polígono poderá conter um ou mais pontos flutuantes pertencendo a lados do polígono.

8. Verificamos, em seguida, se um ou mais pontos flutuantes pertencem ao segmento definido por um ponto fixo e um ponto flutuante. A verificação é necessária porque o polígono dos pontos flutuantes não é plano. Para isto aplicamos o procedimento indicado no item 3.



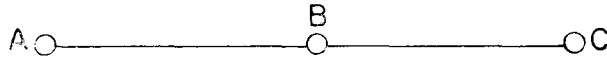


A, M, N colinear  
 D, P, O colinear  
 Fig. 8

9. Identificação de pontos

a) Pontos fixos

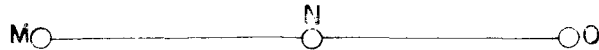
Assuma que temos um ponto fixo pertencendo a um lado do polígono dos pontos fixos.



Anotamos as distâncias  $AB$  e  $BC$  e passamos a operar, apenas, com os extremos  $A$  e  $C$ . As distâncias  $AB$  e  $BC$  permanecerão constantes.

b) Pontos flutuantes

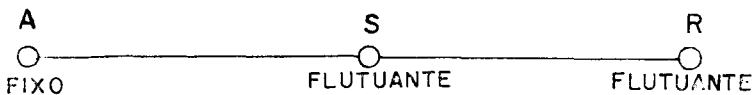
Assuma que temos um ponto flutuante pertencendo ao lado do polígono dos pontos flutuantes.



Anotamos a razão  $MN/NO$  e não as distâncias propriamente, pois estas são suscetíveis de alteração. Assumimos, entretanto, que a razão entre as distâncias permanecerá constante.

c) Pontos fixos e pontos flutuantes

Assuma que temos um ponto flutuante pertencendo ao lado determinado por um ponto flutuante e um ponto fixo.



Anotamos a razão  $AS/SR$  e não as distâncias propriamente, pois estas são suscetíveis de alteração. Assumimos, entretanto, que a razão entre as distâncias permanecerá constante.

## 10. Divisão do polígono dos pontos fixos em triângulos

Dados os pontos fixos podemos sempre construir um polígono convexo. Dois casos podem ser identificados com respeito ao número de pontos considerados e à divisão do polígono em triângulos.

a) Se não existem pontos no interior do polígono a divisão pode ser obtida traçando-se as diagonais a partir de qualquer vértice (figura 9).

b) Se existem pontos no interior, podemos obter a divisão determinando o número de segmentos que dividirão o polígono em triângulos. O número de segmentos é dado por

$$NS = Z(NP - 1) + (NPI - 1)$$

onde  $NP$  é o número total de pontos e  $NPI$  é o número de pontos interiores.

O número de triângulos em que o polígono se divide é igual a  $(NS + NPI - 1)/2$ .

As relações acima independem do modo segundo o qual a divisão é feita. Sugere-se o seguinte procedimento:

b.1. Unimos alternadamente os vértices do polígono conexo e verificamos se existem pontos no interior dos triângulos que ficam determinados;

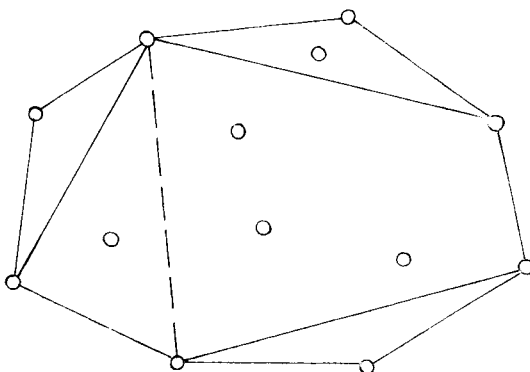


Fig. 10

b.2. Temos, agora, o polígono dividido em *triângulos externos* e um polígono convexo interno. Aplicamos b.1. a este novo polígono, ter-

minando-se, eventualmente, com um quadrilátero. Traçamos uma diagonal do quadrilátero e verificamos se existem pontos no interior dos triângulos resultantes;

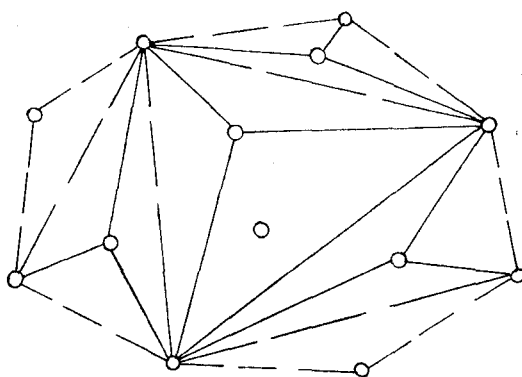


Fig. 11

b.3. Se existem pontos no interior do triângulo, unimos um dos pontos aos vértices do triângulo;

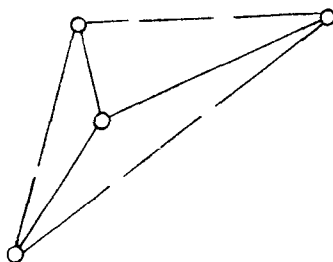


Fig. 12

b.4. Aplicamos b.3. até que em nenhum triângulo se observe a existência de ponto interior.

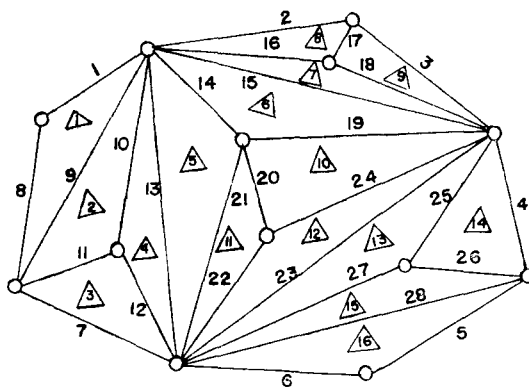


Fig. 13

No exemplo acima temos um total de treze pontos, dos quais cinco são internos. O número total de lados é

$$NS = 2(13 - 1) + (5 - 1) = 24 + 4 = 28.$$

O número de triângulos é igual a  $(28 + 5 - 1)/2 = 16$ . Este mesmo número de lados e de triângulos é obtido se a divisão do polígono em triângulos é feita de uma outra maneira qualquer.

11. *Relação entre cada ponto flutuante e o polígono de pontos fixos.*

Se tomarmos um ponto flutuante e três pontos fixos, determinamos um tetraedro. O tetraedro existe porque já verificamos a condição para isto nos itens 3 e 8. Conseqüentemente, teremos tantos tetraedros, ao combinarmos *um* ponto com o polígono dos pontos fixos, quantos são os triângulos obtidos ao fim das operações indicadas no item 10. Resta verificar se todos os tetraedros de fato têm um vértice comum, no caso o ponto flutuante, especificado pelas distâncias aos pontos fixos. Assumindo, por exemplo, quatro pontos fixos A, B, C, D e um ponto flutuante M, podemos considerar os tetraedros  $M_1 - ABC$  e  $M_2 - ACD$ , entre outros. Conhecidas as distâncias de M aos pontos A, B e C, podemos construir o tetraedro conforme mostra a figura 14 (detalhes sobre esta operação são dados no item 12).

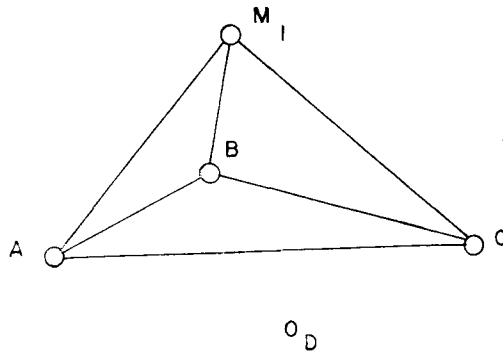


Fig. 14

O tetraedro  $M_2 - ACD$  pode ser construído conforme o indicado na figura 15.

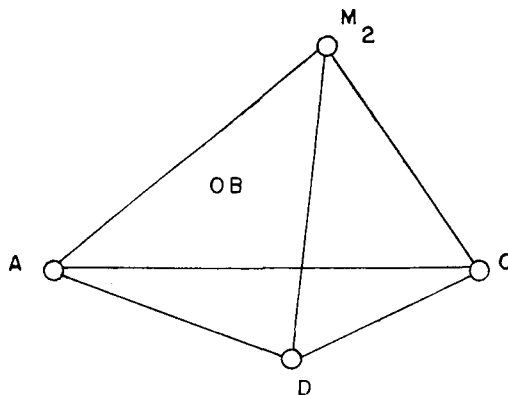


Fig. 15

Se agora combinamos os dois tetraedros tomando como referência os pontos fixos  $A, B, C, D$ , resta verificar se os vértices  $M_1$  e  $M_2$  coincidem. (figura 16).

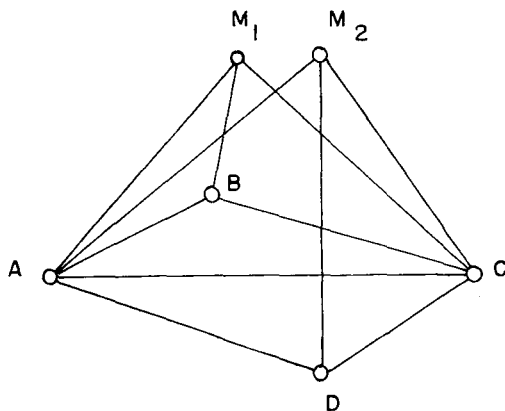


Fig. 16

Evidentemente,

$$M_1A = M_2A$$

$$M_1C = M_2C$$

Entretanto,  $M_1B$  é, usualmente, diferente de  $M_2D$ . Em consequência,  $M_1$  e  $M_2$  não coincidem.

$$M_1B \neq M_2D$$

$$M_1D \neq M_2B$$

Mas, geralmente,

$$M_1A \neq M_2C$$

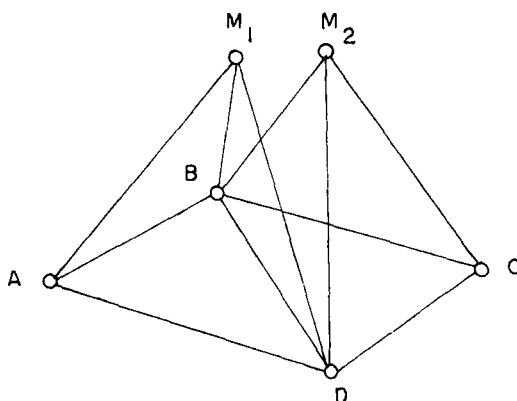
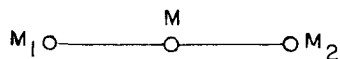


Fig. 17

Em vista da possível não coincidência dos pontos  $M_1$  e  $M_2$ , assumimos que a posição de  $M$  é o ponto médio de  $M_1M_2$ .



Geralmente operamos com mais de um tetraedro. De fato, o número de tetraedros é igual ao número de triângulos em que se divide o polígono dos pontos fixos. Como resultado, teremos uma série de pontos  $M_i, i = 1, n$ , onde  $n$  é o número de triângulos ou tetraedros. O ponto  $M$  é considerado como sendo o centro de gravidade da linha quebrada  $M_{123}, \dots, n$  (figura 18). A determinação deste centro de gravidade é discutida no item 13.

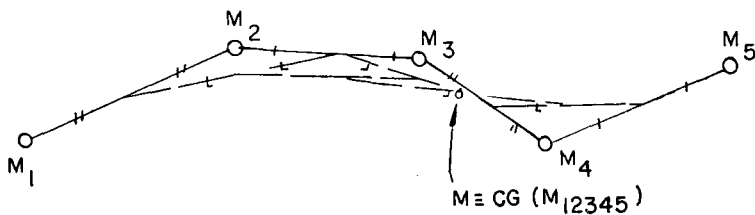


Fig. 18

## 12. Construção do tetraedro

Sejam  $A, B, C$  três pontos fixos e  $M$  um ponto flutuante. Usamos a seguinte construção para determinar a posição de  $M$  em relação a  $ABC$ .

a) Adote um sistema  $(X, Y, Z)$  de coordenadas representado no plano como:

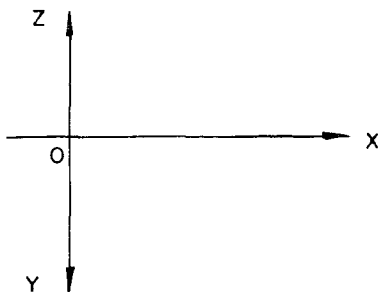


Fig. 19

b) Sendo conhecidos os lados do triângulo podemos construí-lo.

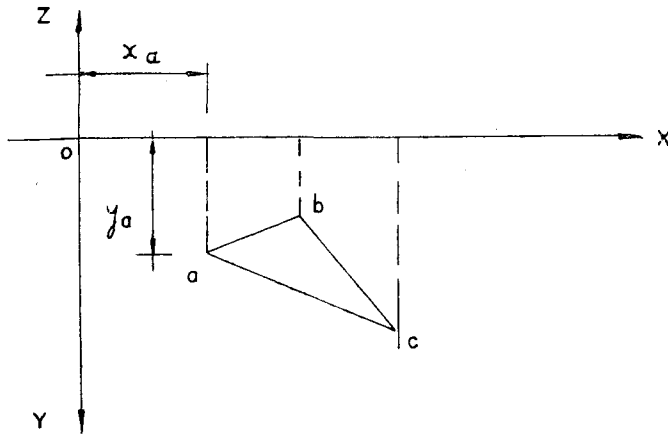


Fig. 20

As coordenadas dos pontos são obtidas em relação ao sistema  $(XYZ)$  de referência. O triângulo pertence ao plano  $(XY)$ .

c) No plano  $(XY)$  construímos dois dos triângulos  $MBC$ ,  $MAC$ ,  $MAB$ , faces do tetraedro. A figura 21 mostra as faces  $MAC$  e  $MBC$  onde  $M$  é identificado como  $M'$  e  $M''$ . A partir de  $M'$  traçamos uma perpendicular à  $AC$  e a partir de  $M''$  traçamos uma perpendicular à  $BC$ . A interseção das duas perpendiculares é o ponto  $m$ . Este ponto é a projeção de  $M$  sobre a base  $ABC$  do tetraedro.

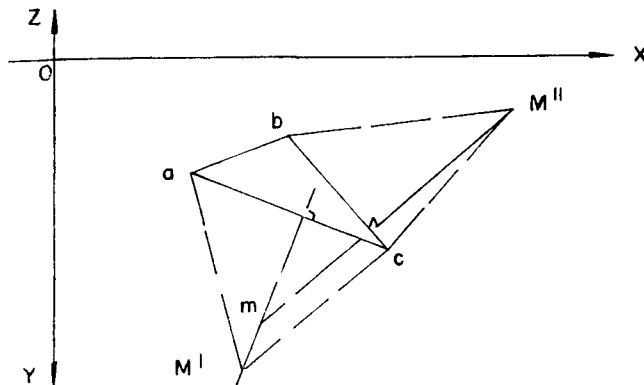


Fig. 21

d) A partir de  $m$  traçamos uma paralela à  $BC$ , e com centro em  $k$  traçamos uma circunferência de raio  $kM''$  cortando a paralela no ponto  $t$  (figura 22).

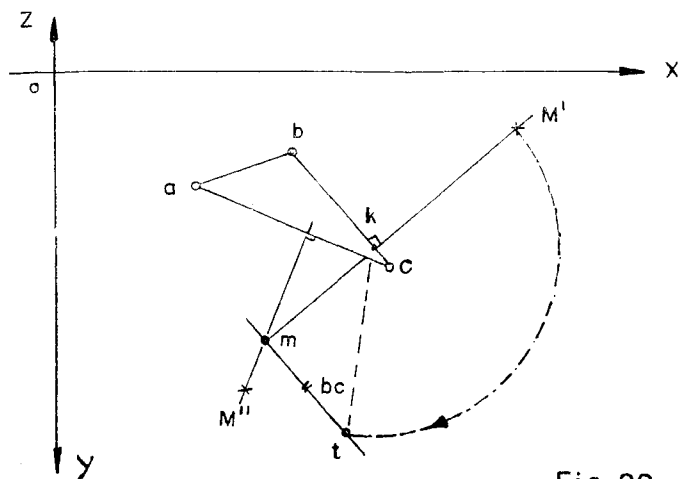


Fig. 22

A distância  $mt$  é a altura do ponto  $M$  em relação à base  $ABC$ . A figura 23 mostra o ponto  $M$  referido do sistema  $(XYZ)$ .

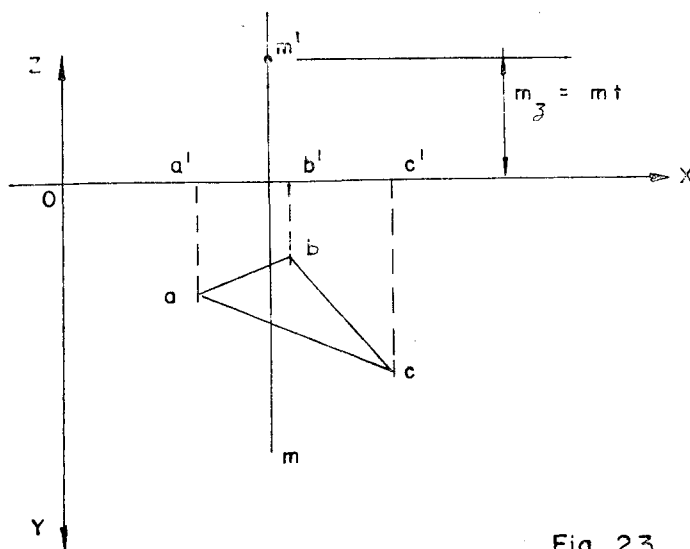


Fig. 23

e) Anotamos as coordenadas  $(x, y)$  de todos os pontos fixos e de todos os pontos flutuantes.

### 13. Mais de três pontos fixos

Neste caso temos tantos tetraedros quantos são os triângulos em que se divide o polígono dos pontos fixos. Construímos cada tetraedro de acordo com o procedimento do item 12 e determinamos a posição do ponto flutuante  $M$  de acordo com o procedimento do item 11.

A determinação do centro de gravidade é feita da seguinte forma:

Sejam  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_k$  os vértices de  $(k)$  tetraedros (figura 24). Para determinar a coordenada  $x_M$ , construímos a poligonal  $(m'_1 m'_2 \dots$



$m'_k$ ) e ao ponto médio de cada segmento ( $m'_1 m'_2$ ), ( $m'_2 m'_3$ ) ... ( $m'_{k-1} m'_k$ ) associamos um vetor de magnitude proporcional ao comprimento de cada segmento. Estes vetores têm direção perpendicular ao eixo —  $x$ . Então,

$$x_M = \frac{(X_1 l_1) + (X_2 l_2) + (X_3 l_3) + \dots + (X_k l_k)}{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k}$$

*Mutatis mutandis* (figuras 24 e 26).

$$y_M = \frac{(Y_1 h_1) + (Y_2 h_2) + (Y_3 h_3) + \dots + (Y_k h_k)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_k}$$

$$z_M = \frac{(Z_1 g_1) + (Z_2 g_2) + (Z_3 g_3) + \dots + (Z_k g_k)}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_k}$$

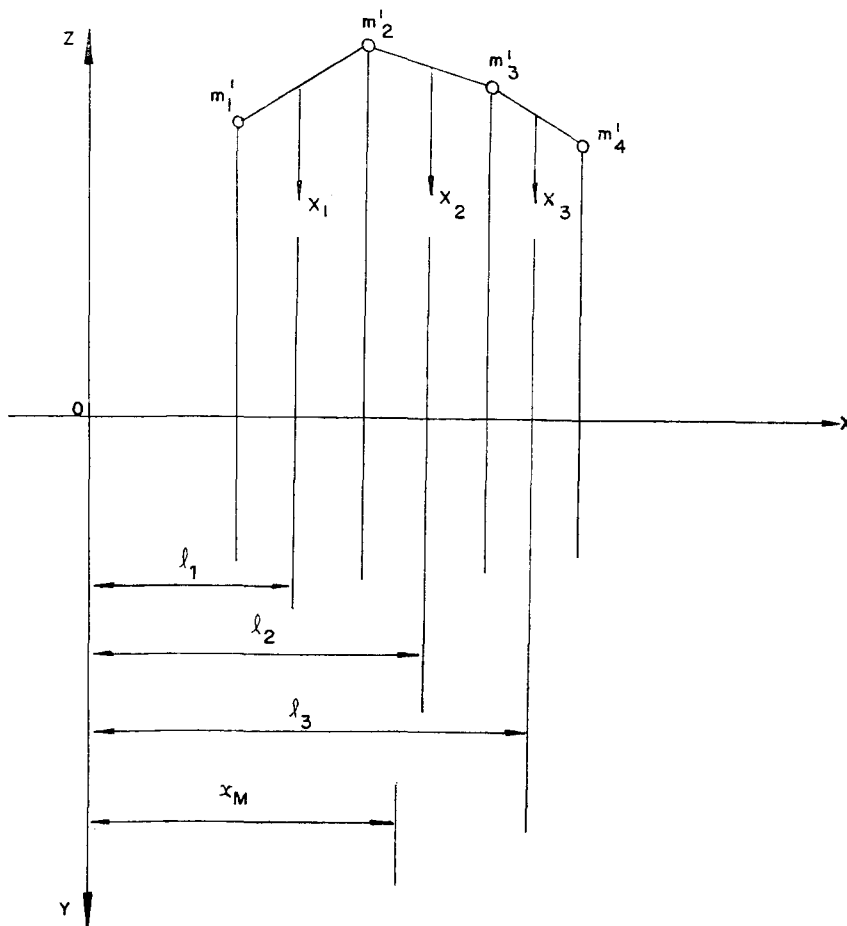


Fig. 24

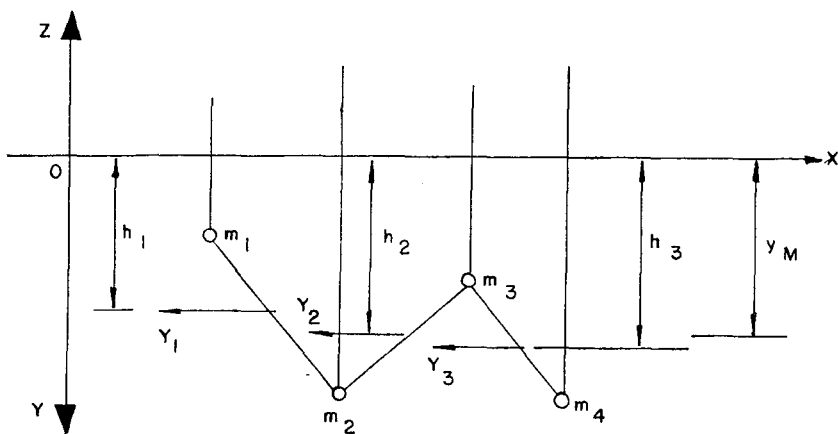


Fig. 25

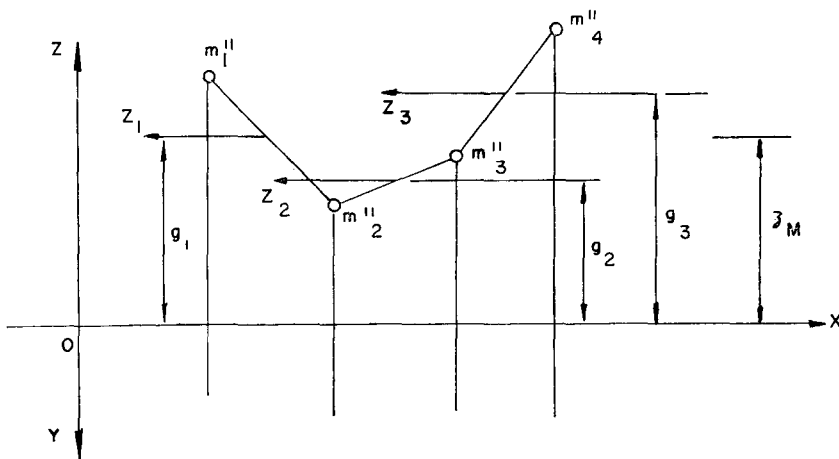


Fig. 26

14. *Correção da distância de um ponto flutuante a um ponto fixo.*

Em vista da necessidade da determinação de um ponto  $M$  como centro de gravidade das várias posições que ele ocupa com relação aos pontos fixos, devemos recalculer as distâncias deste ponto único a todos os pontos fixos. Porque as coordenadas são conhecidas, utilizamos

$$MA = \sqrt{(x_{ma})^2 + (y_{ma})^2 + (z_{ma})^2}$$

*As novas distâncias constituem a primeira alteração na matriz de insumo e devem ser nela anotadas.*

15. Os itens 11 a 14 são repetidos para cada ponto flutuante.

16. *Relação entre dois pontos flutuantes.*

As construções necessárias para a verificação da relação, expressa na matriz de insumo, entre dois pontos flutuantes são as seguintes.

Sejam  $M$  e  $N$  dois pontos flutuantes. Cada ponto é relacionado ao polígono dos pontos fixos e suas coordenadas recalculadas conforme o especificado no item 13.

- a) O ponto  $M$  tem coordenadas  $x_M, y_M, z_M$  e o ponto  $N$  tem coordenadas  $x_N, y_N, z_N$ .
- b) Considere o sistema de referência indicado na figura 27.

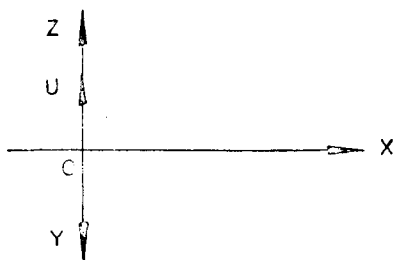


Fig. 27

c) A partir do ponto  $O$  no eixo —  $x$ , traçamos as retas 1, 2 e 3 (figura 28). Os ângulos que estas retas fazem com o eixo —  $x$  são arbitrários. Optamos pelos ângulos indicados.

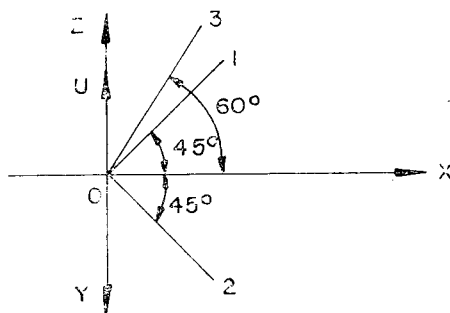


Fig. 28

d) Traçamos uma reta paralela ao eixo —  $x$ , distante dele de um valor arbitrário  $Z_{ARB}$ , acima do eixo se positivo e abaixo se negativo. Identificamos esta paralela como  $(\alpha, 3)$  (figura 29). O valor  $Z_{ARB}$  permanecerá constante.

e) A partir do ponto de interseção da paralela (item  $d$  acima) com a reta 3, traçamos uma perpendicular ao eixo —  $x$  (figura 29).

f) A partir do ponto de interseção da perpendicular (item  $e$  acima) com o eixo —  $x$ , traçamos paralelas às retas 1 e 2. Estas paralelas são identificadas como  $(\alpha, 1)$  e  $(\alpha, 2)$ .

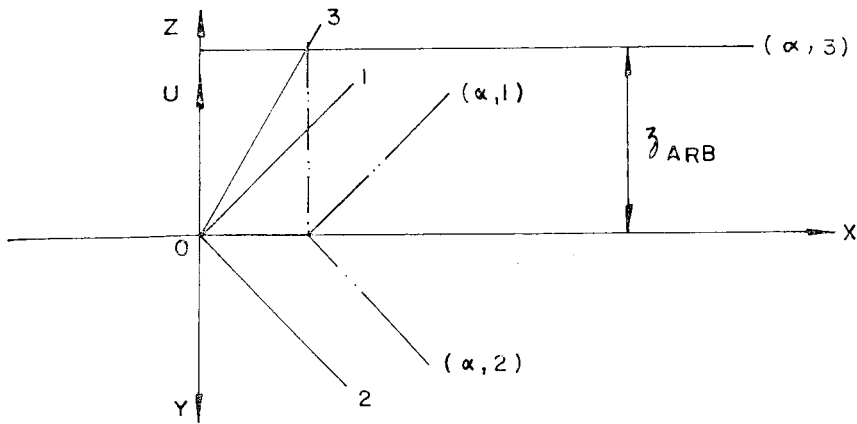


Fig. 29

g) Traçamos uma reta paralela ao eixo —  $x$ , distante dele de um valor igual a  $y_M$ , coordenada do ponto  $M$ , acima do eixo se positivo e abaixo se negativo. Identificamos esta paralela com  $(M, 2)$  (figura 30).

h) A partir do ponto de interseção de  $(M, 2)$  com  $(\alpha, 2)$ , traçamos uma perpendicular ao eixo (figura 30).

i) A partir do ponto de interseção da perpendicular (item  $h$  acima) com o eixo —  $x$ , traçamos uma paralela à reta  $(\alpha, 1)$ . Identificamos esta paralela como  $(M, 1)$  (figura 30).

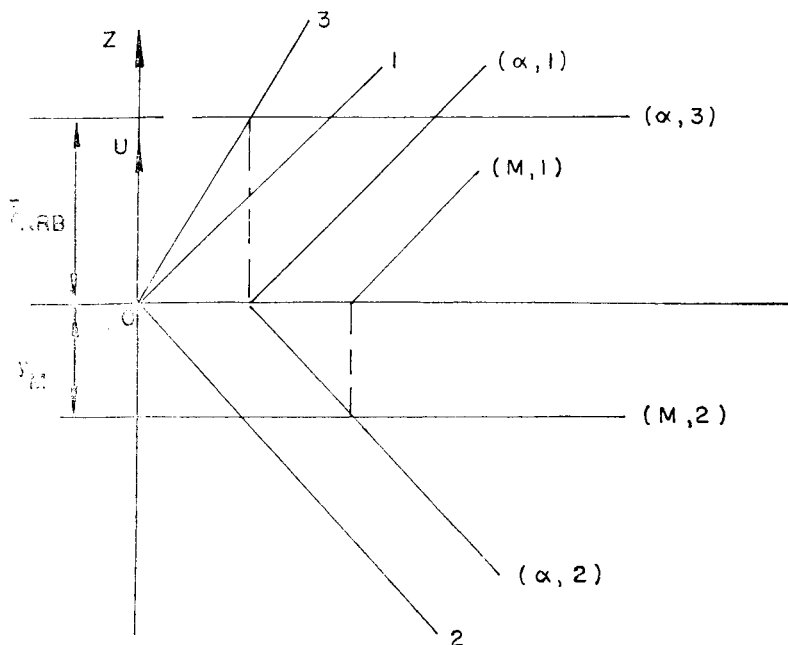


Fig. 30

j) A partir do ponto  $O$  no eixo  $x$ , marcamos o valor  $x_M$ , coordenada do ponto  $M$ , ao longo do eixo  $x$ , para a direita se positivo e para a esquerda se negativo (figura 31).

k) A partir do ponto obtido traçamos uma perpendicular ao eixo  $x$  (figura 31).

l) As interseções da perpendicular (item  $k$  acima) com as retas  $(\alpha, 3)$ ,  $(M, 1)$  e  $(M, 2)$  são identificadas como pontos  $M3$ ,  $M1$  e  $M2$ , respectivamente (figura 31).

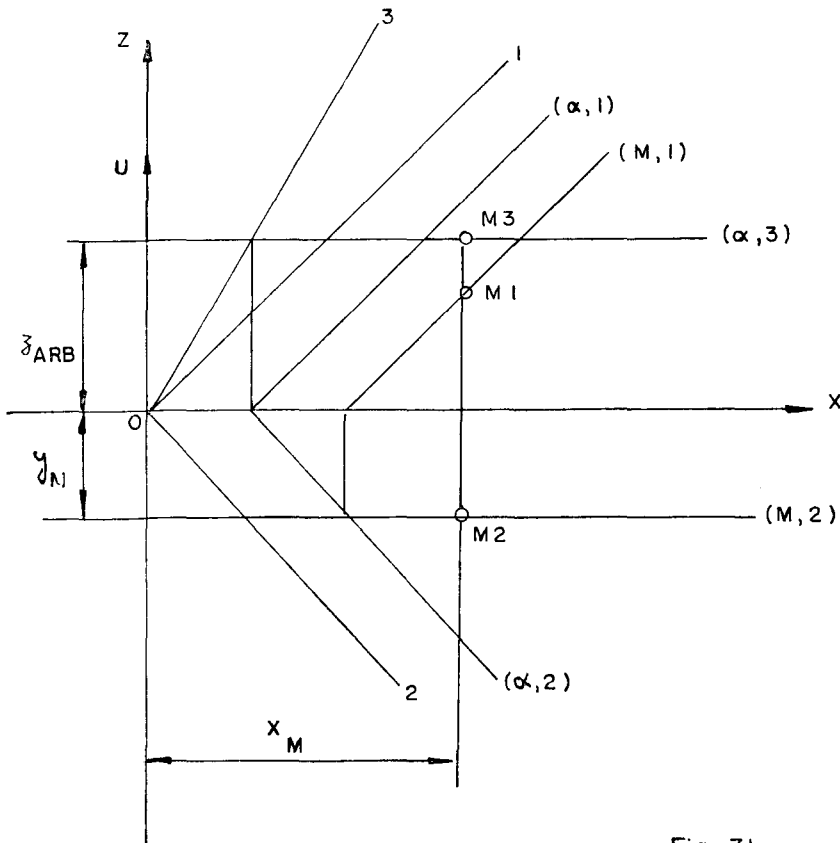


Fig. 31

m) Com os valores de  $x_N$  e  $y_N$  para o ponto  $N$ , repetimos as operações descritas nos itens  $g$ ,  $h$ ,  $i$ ,  $j$ ,  $k$ ,  $l$  acima, obtendo  $N1$ ,  $N2$  e  $N3$  (figura 32).

### 17. Determinação de $MM$ e $NN$ no espaço tetradimensional em correspondência com $M$ e $N$ .

a) Traçamos perpendiculares às retas 1, 2 e 3 a partir dos pontos  $M1$ ,  $M2$  e  $M3$ , respectivamente, identificando-se como  $PM1$ ,  $PM2$  e  $PM3$  (figura 32-a).

b) Tomamos arbitrariamente um ponto  $R1$  de  $PM1$  e traçamos uma perpendicular ao eixo  $x$ , obtendo as interseções com  $PM2$  e  $PM3$ . Os pontos obtidos são identificados como  $R2$  e  $R3$ , respectivamente (figura 32-a).

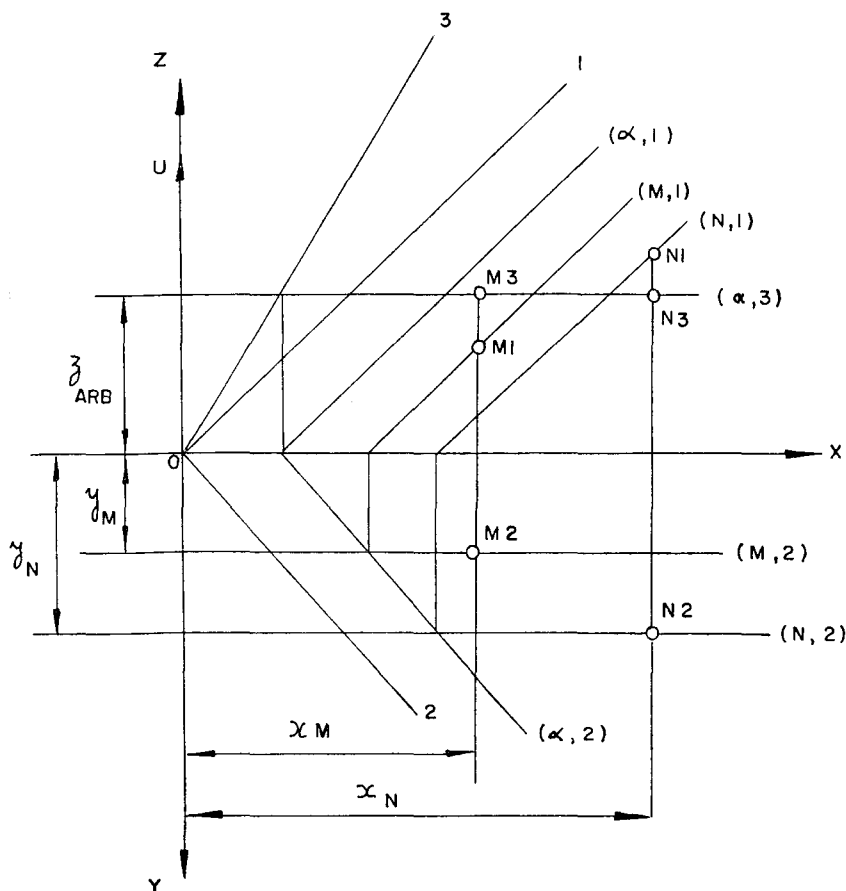


Fig. 32

c) Com centro em  $M_3$  e raio  $(M_3 - R_3)$  traçamos uma circunferência que corta a reta  $(\alpha, 3)$  no ponto  $R_{31}$  (figura 32-a).

d) Pelos pontos  $R_1$  e  $R_2$  traçamos perpendiculares ao eixo —  $x$  (figura 32-a).

e) Pelo ponto  $R_{31}$  traçamos uma perpendicular ao eixo —  $x$  e determinamos  $R_{11}$  e  $R_{21}$  nas paralelas ao eixo —  $x$  que passam por  $R_1$  e  $R_2$  (item d) (figura 32-a).

f) Com centro em  $M_2$  e raio  $(M_2 - R_{21})$  traçamos uma circunferência que corta a reta  $(M, 2)$  no ponto  $R_{22}$  (figura 32-a).

g) Pelo ponto  $R_{22}$  traçamos uma perpendicular ao eixo —  $x$  e determinamos  $R_{32}$  e  $R_{12}$  nas paralelas ao eixo —  $x$  que passam por  $R_{31}$  e  $R_{11}$  (figura 32-a).

h) Traçamos a reta  $(M_1 - R_{12})$  (figura 32-a).

i) A partir do ponto  $M_1$ , na direção de  $R_{12}$  sobre a reta  $(M_1 - R_{12})$ , marcamos a distância igual a  $Z_M$ , coordenada do ponto  $M$ , item 13. Identificamos o ponto obtido como  $M_{12}$  (figura 33).

j) Pelo ponto  $M_{12}$  traçamos uma paralela ao eixo —  $x$  e determinamos sua interseção com a reta  $(M_1 - R_1)$ . Esta interseção é o novo ponto  $MM_1$  (figura 33).



m) Consideramos o ponto  $N(x_N, y_N, z_N)$ .

n) Pelos pontos  $N1, N2$  e  $N3$  traçamos perpendiculares às retas 1, 2 e 3, respectivamente. Retornamos ao item b e repetimos os itens b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, obtendo as novas coordenadas do ponto  $NN(x_{NN}, y_{NN}, z_{NN}, u_{NN})$ .

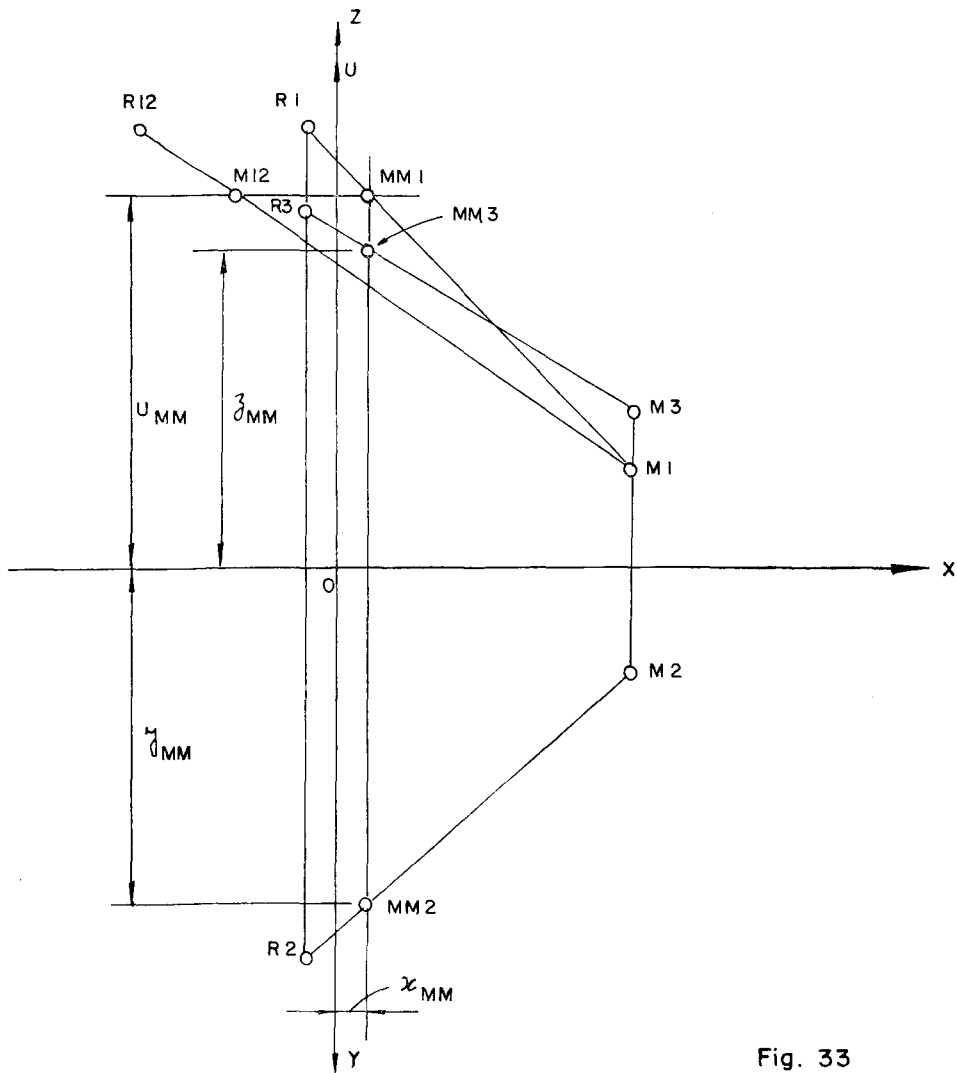


Fig. 33

18. Calculamos a distância  $MM - NN$ .

19. Anotamos esta distância.

20. Tomamos o mesmo ponto  $M$  e um outro ponto flutuante, repetindo os itens 16 a 19.

Nota: no (item 16, c) usamos as mesmas retas 1, 2 e 3. No (item 16, d) usamos o mesmo valor de  $z_{ARB}$ .



21. Combinamos dois pontos flutuantes e aplicamos os itens 16 a 19.

22. *Saída (output)*

*Imprima:*

a) A matriz original.

b) A matriz modificada com as novas distâncias entre pontos fixos e pontos flutuantes e entre dois pontos flutuantes. As distâncias entre pontos fixos permanecem inalteradas. O título desta matriz modificada é *nova matriz sem concessões*.

c) Coordenadas dos pontos fixos e dos pontos flutuantes com referência a um sistema cartesiano bidimensional.

No (item 12, b) calculamos as coordenadas  $(x, y)$  de todos os pontos fixos, e no (item 16,1, figura 31) temos as coordenadas  $z_{ARB}, x, y$  onde  $z_{ARB} = \text{constante}$  para os pontos flutuantes. A fim de obter o arranjo dos pontos fixos e dos pontos flutuantes procedemos da seguinte forma:

c.1. Tomamos as coordenadas  $(x, y)$  dos pontos fixos e aplicamos os itens 16g e 16l. Caracterizamos assim os pontos fixos de maneira idêntica à dos pontos flutuantes.

c.2 Para *todos* os pontos (fixos e flutuantes). Seja  $A1$  e  $A2$  um ponto genérico (figura 33-a).

c.2.1. Determinamos as interseções da reta  $A1 - A2$  com  $(\alpha, 1)$  e com eixo  $-x$ , identificando os pontos obtidos como  $AC$  e  $AB$ , respectivamente.

c.2.2. Pelo ponto  $AB$  traçamos uma perpendicular à reta  $(\alpha, 2)$ .

c.2.3. Com centro no ponto  $AD$ , ponto de interseção de  $(\alpha, 2)$ ,  $(\alpha, 1)$  e o eixo  $-x$ , traçamos uma circunferência que corta a perpendicular do item c.2.2. acima, no ponto  $AE$ .

c.2.4. Traçamos a reta  $(AD - AE)$ .

c.2.5. Pelo ponto  $AF$ , interseção das retas  $(A, 2)$  e  $(\alpha, 2)$ , traçamos uma paralela à reta  $(AD - AE)$ .

c.2.6. Pelo ponto  $A2$  traçamos uma perpendicular à reta  $(\alpha, 2)$  e determinamos o ponto  $A$  na interseção desta perpendicular com a reta do item c.2.5. acima.

c.2.7. Determinamos as coordenadas de  $A$  em relação a um sistema de referência  $(xx, yy)$  de origem arbitrária  $00$ , com o eixo  $-xx$  paralelo ao eixo  $-x$  (figura 33-a). Anotamos as coordenadas  $(xx^A, yy^A)$ .

c.2.8. Imprimimos as coordenadas  $(xx, yy)$  para todos os pontos fixos e flutuantes em duas tabelas com o título "coordenadas de pontos sem concessões".

23. *Opção: nova matriz com concessões*

Tomamos as distâncias entre pontos flutuantes na matriz original (matriz de insumo) e comparamos com as distâncias na matriz modificada obtida no item 22. Seleccionamos a distância que apresenta, percentualmente, a menor modificação. Suponhamos que isto ocorra com a distância entre os pontos  $M$  e  $N$ .

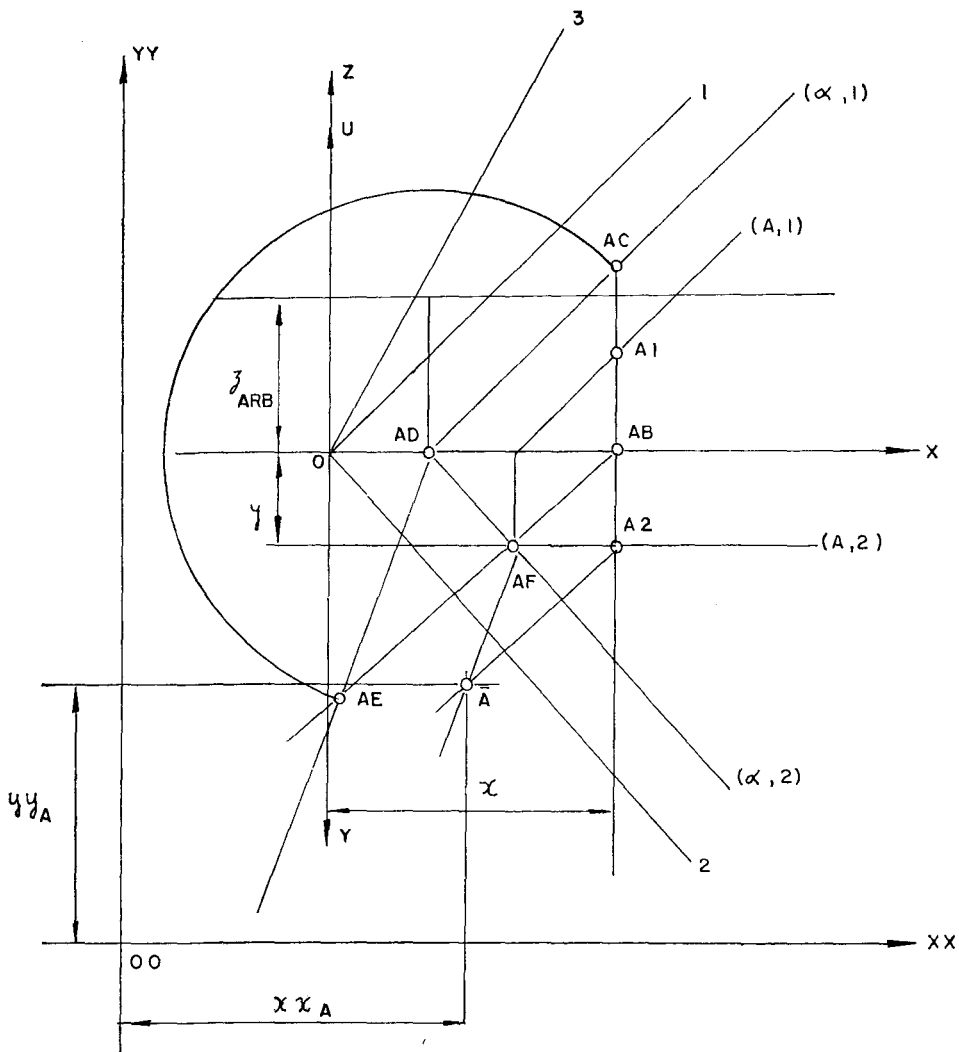


Fig. 33-a

24. Sejam  $A$  e  $B$  os dois valores da distância de  $M$  à  $N$ . Calculamos:

a)  $AMEDI = (A + B)/2$

b)  $GMEDI = \text{SQRT}(A * B)$

c)  $A = AMEDI$

d)  $B = GMEDI$

e) Retornamos ao item  $a$  acima

f) Terminamos quando  $(AMEDI - GMEAN) \leq 0,001$

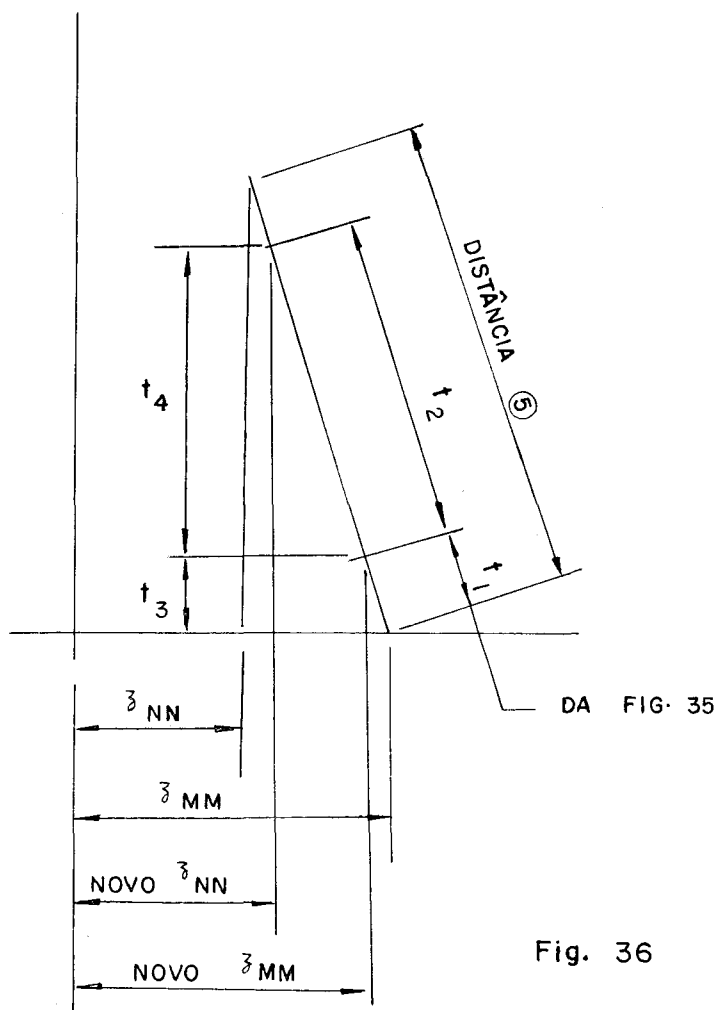
25. Com as coordenadas dos pontos  $MM$  e  $NN$  construímos o seguinte diagrama (figura 34).



27. Determinamos as novas coordenadas de  $MM$  e  $NN$ , como mostram os seguintes diagramas:

- a) Coordenadas  $u_{MM}$  e  $u_{NN}$  (figura 35).
- b) Coordenadas  $z_{MM}$  e  $z_{NN}$  (figura 36).
- c) Coordenadas  $y_{MM}$  e  $y_{NN}$  (figura 37).
- d) Coordenadas  $x_{MM}$  e  $x_{NN}$  (figura 38).

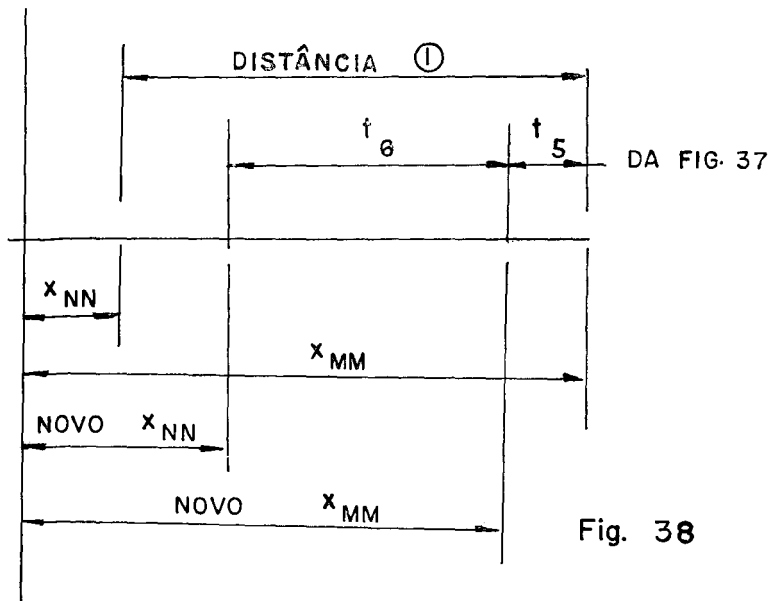
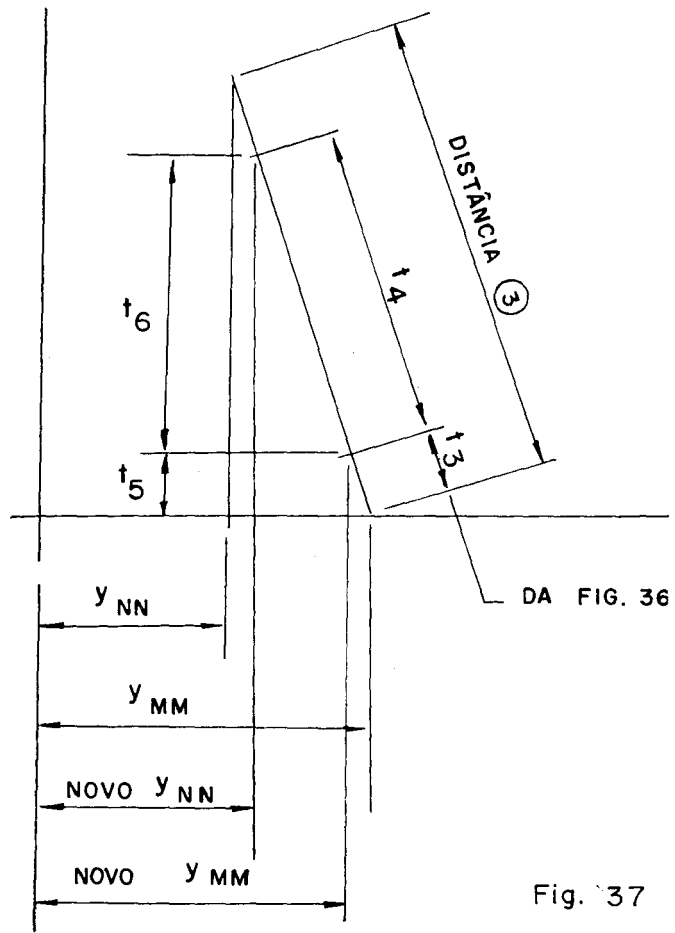
28. Determinadas as novas coordenadas para *dois pontos flutuantes*, recalculamos todas as distâncias destes pontos e todos os demais pontos flutuantes e pontos fixos.



29. Uma nova matriz é obtida.

30. Comparamos as distâncias da matriz do item 29 com as distâncias da matriz do item 22. Seleccionamos a distância que apresenta a menor variação percentual. Se os pontos forem os mesmos já anteriormente seleccionados no item 23, tomamos os dois pontos cuja variação percentual é menor que todas as demais variações de distâncias.

Anotamos a matriz do item 28. Retornamos ao item 24.



31. Repetimos os itens 24, 25, 26, 27, 28 e no item 29 obtemos uma nova matriz.

32. Procedemos com o item 30 até que todos os pares de pontos flutuantes sejam considerados.

33. A última matriz é a *matriz transformada*.

34. Imprimimos esta matriz sob o título "Matriz com concessões".

35. Para obtermos as coordenadas  $(x, y)$  dos pontos flutuantes, no plano, procedemos como se segue (figura 39).

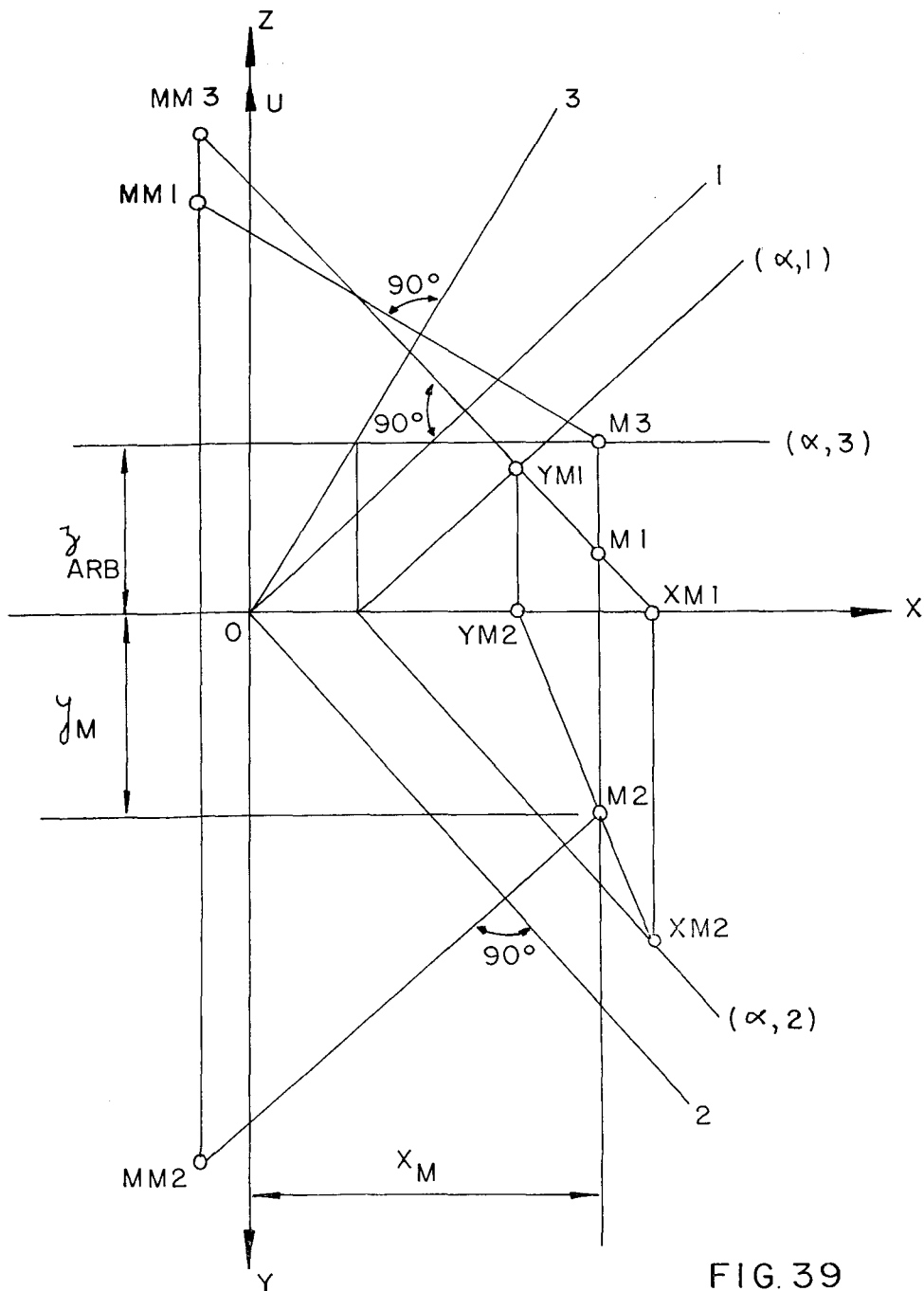
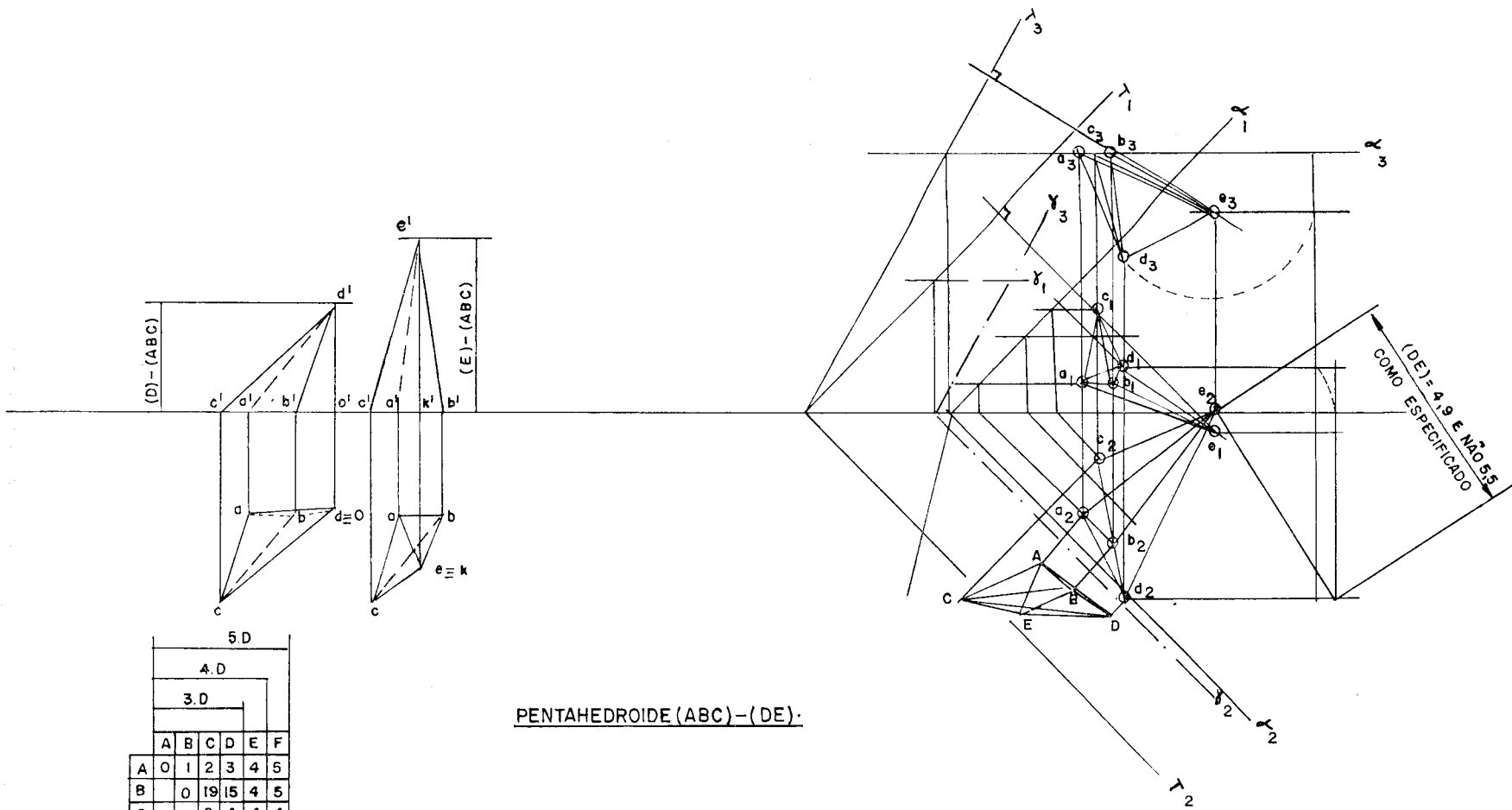


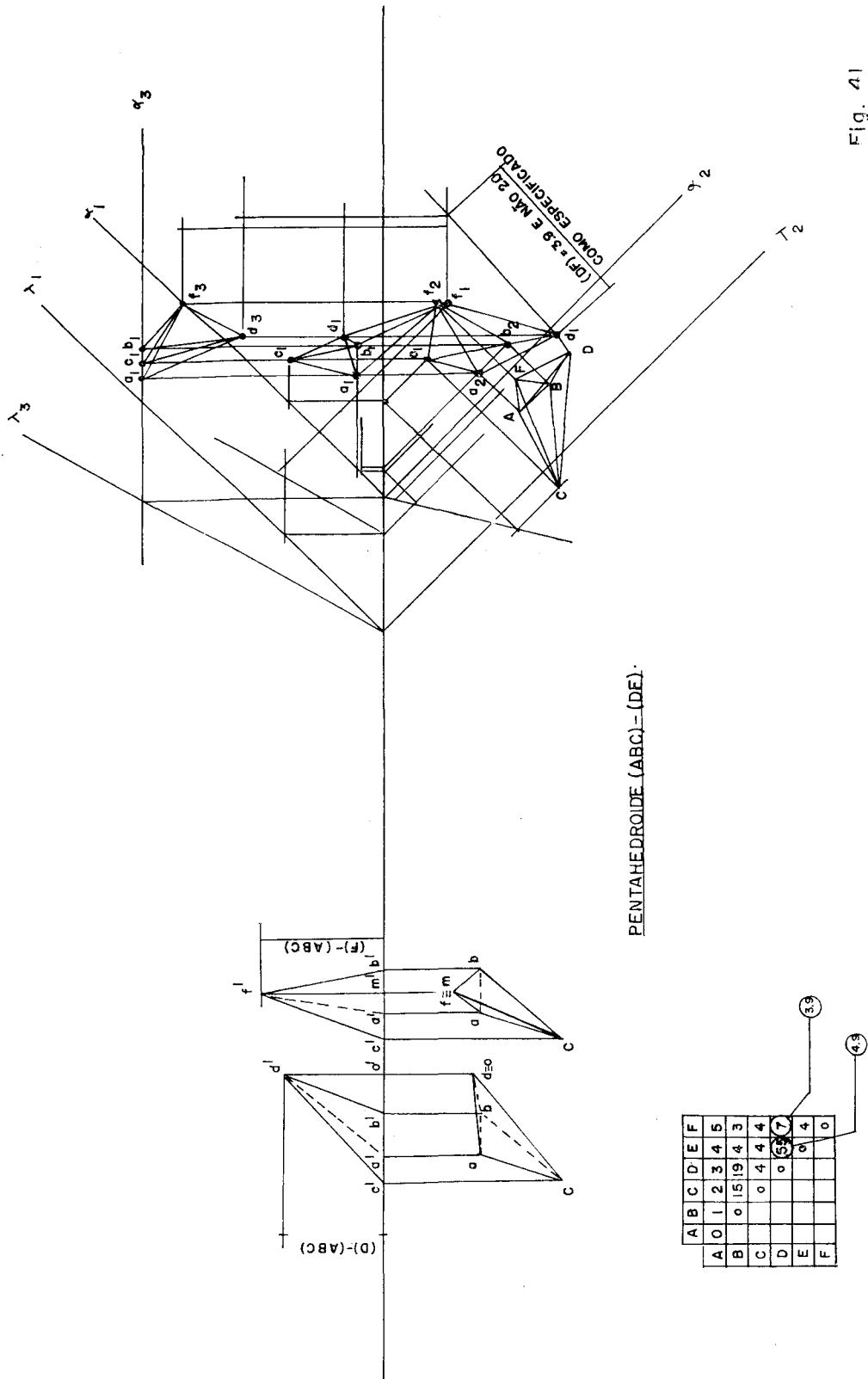
FIG. 39



5 D						
4 D						
3 D						
A	B	C	D	E	F	
A	0	1	2	3	4	5
B		0	19	15	4	5
C			0	4	4	4
D				0	(5)	7
E					0	4
F						0

49

Fig. 40



A	B	C	D	E	F	
A	0	1	2	3	4	5
B	0	15	19	4	3	
C	0	0	4	4	4	
D	0	0	5	7	0	
E	0	0	0	4	0	
F	0	0	0	0	0	



a) Um ponto flutuante, digamos  $MM$ , é identificado pelas coordenadas  $(x, y, z, u)_{MM}$ .

b) Pelos pontos  $MM1$ ,  $MM2$  e  $MM3$  traçamos perpendiculares às retas 1, 2 e 3 respectivamente.

c) A perpendicular pelo ponto  $MM$  corta o eixo  $x$  no ponto  $XM1$  e a reta  $(\alpha, 1)$  no ponto  $YM1$ .

d) Pelo ponto  $YM1$  traçamos uma perpendicular ao eixo  $x$ , cortando-o no ponto  $YM2$ .

e) Pelo ponto  $XM1$  traçamos uma perpendicular ao eixo  $x$ , cortando a reta  $(\alpha, 2)$  no ponto  $XM2$ .

f) Traçamos a reta  $(XM2 - YM2)$ .

g) Determinamos a interseção da reta do item f acima, com a reta pelo ponto  $MM2$  perpendicular à reta 2. O ponto de interseção das duas retas é o ponto  $M2$ .

h) Pelo ponto  $M2$  traçamos uma perpendicular ao eixo  $x$  cortando a reta  $(XM1 - YM1)$  no ponto  $M1$ .

36. Quando o item 35 é aplicado a todos os pontos flutuantes, aplicamos em seguida os itens 22, de c.2.1. a c.2.8.

37. Imprimimos as coordenadas  $(xx, yy)$  para todos os pontos fixos e flutuantes em duas tabelas. O título é “coordenadas dos pontos após concessões”.

### Exemplo com solução gráfica

Como ilustração do algoritmo procuramos relacionar três pontos fixos (A), (B) e (C) com três pontos flutuantes (D), (E) e (F), sendo dada a matriz de distâncias sociais (figura 40). Nas figuras 40, 41, 42 e 43 temos a solução gráfica *sem concessões*.

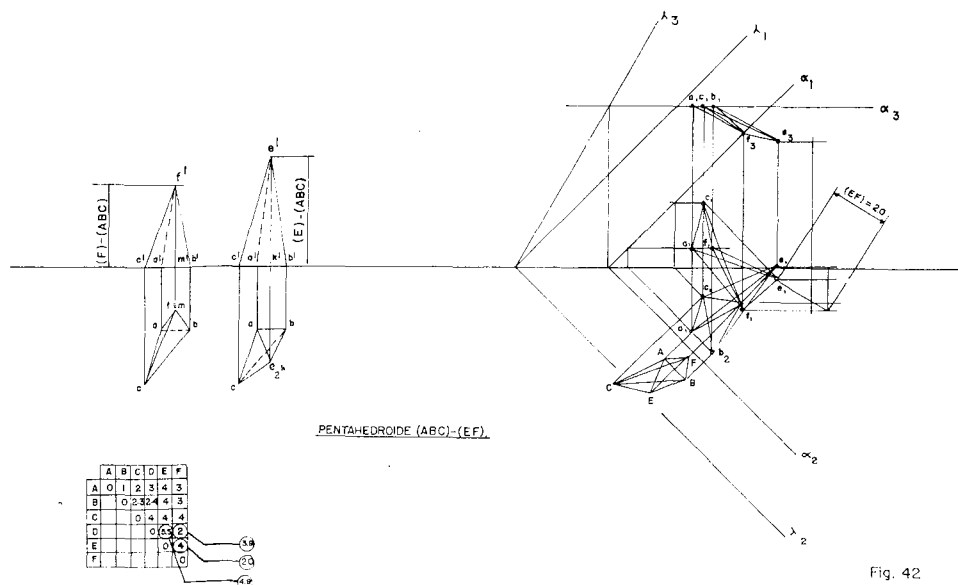


Fig. 42

Determinam 3  
Pentahedroides

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	2	3	4	3
B		0	25	25	4	3
C			0	4	4	4
D				0	49	39
E					0	2
F						0



Pontos Fixos      Pontos Flutuantes

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	2	3	4	3
B		0	25	25	4	3
C			0	4	4	4
D				0	5.5	2
E					0	4
F						0

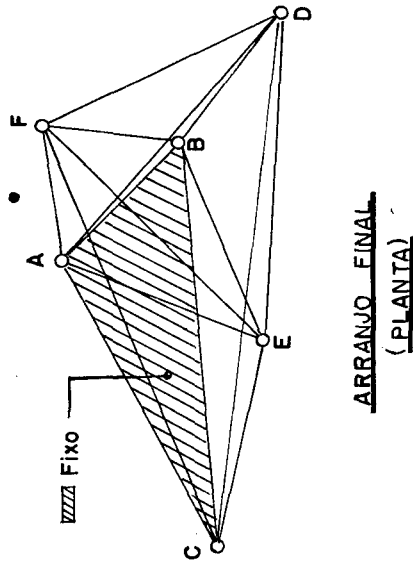


Fig. 43

## QUINTA PARTE

### Aplicações alternativas do algoritmo

Um fator importante do algoritmo proposto é sua potencial aplicabilidade em uma grande variedade de problemas, mais como um instrumental do que como modelo concebido como uma abstração generalizada e simplificada do mundo real. A vantagem neste caso é que o algoritmo encontra seu lugar entre a concepção abstrata do modelo e a solução prática a ser atendida. Este relacionamento, isto é, a dependência de um modelo em um algoritmo é indicada no problema que discutimos. No caso, a matriz de distâncias sociais é dada e procuramos otimizar as distâncias físicas do mundo real, envolvendo novos pontos à medida que se relacionam com pontos já existentes. A resolução desta otimização é o que o algoritmo procura alcançar.

De fato, este é o objetivo. O que se situa entre o algoritmo, com sua solução mecânica, e o mundo real é o modelo, concebido como uma abstração por processo e construção dependentes de fatores e decisões não diretamente ligados ao algoritmo propriamente dito. Assim, as distâncias sociais que servem como insumo no algoritmo são derivadas de uma conceituação que se fundamenta em um modelo de localização espacial. No que diz respeito ao algoritmo apenas, nenhuma relação existe entre ele (algoritmo) e o modelo abstrato.

A solução fornecida pelo algoritmo refere-se apenas às condições que se apresentam sob as estipulações consideradas pelo modelo. Por outro lado, o algoritmo pode ser utilizado como um instrumento que determina as estipulações que devem existir, a fim de que um certo tipo ou número de condições sejam observadas.

Temos, então, duas importantes características inerentes ao proposto algoritmo. 1) Dadas as estipulações assumidas no modelo, o algoritmo determina as relações entre os pontos. 2) Dadas as relações entre os pontos, o algoritmo determina as estipulações a serem consideradas no modelo.

O exemplo discutido neste trabalho lida com a primeira característica. Em termos genéricos, discutimos um outro problema onde se verifica a possibilidade de utilizar, em processo de interação, as duas características. Tomamos como problema o caso de transporte urbano.

Em sua mais simplificada versão, um modelo de transporte urbano pode ser concebido em termos da localização dos elementos existentes em uma rede de transporte urbano, tais como terminais, locais de estacionamento, ligações físicas entre os mesmos, tipos, capacidade e número de veículos operando na rede. Além disso podemos considerar todas as características destes elementos, tendo em vista as exigências que impõem nas propriedades sociofísicas dos elementos da rede. Por exemplo, considerar-se-iam características definidoras da função ecológica da rede (nível de organização, tecnologia empregada, características da população, condições físicas do meio ambiente).

Eliminando o elemento população como fator, justamente aquele que a rede de transporte propõem-se servir, sugerimos agora a proposição de um problema em que se pede a determinação das condições que devem existir nas relações entre os elementos da rede, em função das características da população. Traduzindo em termos mais técnicos, sejam  $x, y, z, \dots, n$ , as coordenadas de pontos singulares de uma rede de transporte. Estes pontos podem ser terminais, pontos de mudança de meio de transporte etc. As coordenadas são, em essência, expressões

dos fatores que entram na definição operacional de um índice ecológico da forma  $L = f(T, O, E, EP)$ , onde cada letra representa tecnologia, organização, meio ambiente (físico-social) e o fator sociopsicológico. Definimos, então, um conjunto de pontos singulares da forma  $A_i(x, y, z, \dots n)$ . Evidentemente, porque este é um conjunto de pontos homogêneos, estimamos as distâncias sociais entre os mesmos aplicando a conceituação discutida na segunda parte deste trabalho. Podemos, também, ordenar os pontos do conjunto de acordo com os valores dos índices ecológicos que lhes correspondem.

Propositadamente ignorado na estimativa da distância social é o fator população, pois o problema a ser analisado em uma rede de transporte parece ser o seguinte: "Quais são as condições que devem prevalecer nos pontos singulares a fim de que uma certa população, propriamente classificada e estratificada, seja atendida em cada ponto sob condições ótimas de serviço?"

Entra, então, aqui, a aplicação do algoritmo proposto neste trabalho, porque verificamos que a conceituação do modelo do sistema de transporte foi feita, conforme o anteriormente apontado, em um certo nível de abstração e agora o que necessitamos executar são as "mudanças" nas coordenadas dos pontos singulares de acordo com os efeitos nelas impostos pelas características da população que deles se servem. Temos, então, na solução deste problema, duas matrizes de distâncias sociais. Uma é definida em termos de todos os fatores, excluindo o fator população. A segunda é definida em termos das características da população. A comparação das duas matrizes e a manipulação da primeira indicarão os ajustamentos a serem feitos nas coordenadas dos pontos singulares.

Devemos enfatizar que a utilização do algoritmo não torna válido ou inválido os aspectos conceituais do modelo. Esta conceituação pode ser feita a qualquer nível de abstração. Da mesma forma, "serviço" é, também, um conceito que pode ser operacionalizado de diferentes maneiras. Todos estes procedimentos são independentes do algoritmo que fornece apenas um meio de determinar as relações entre o modelo conceitual e sua aplicação em termos de implementação. Esta função do algoritmo é, nos parece, crucial e de importante significação em qualquer problema de localização espacial, pois se situa entre o conceitual e o desejado. Destaca-se como um meio de determinar os tipos de intervenção que devem ser feitos a fim de que as condições existentes observadas se transformem em condições ótimas.

## BIBLIOGRAFIA

- ADLER, Ronald, JOHN S. Adams, PETER Gould — *Spatial Organization*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1971.
- LINDGREN, C. Ernesto S. — “Symmetry in a Four-Dimensional Space”, Report No. 11, Dept. Graphics and Eng. Drawing, Princeton University, 1964a.
- “An Engineering Application of Four-Dimensional Descriptive Geometry” Report No. 12, Dept. Graphics and Eng. Drawing, Princeton University, 1964b.
- “On the Fundamentals of the Four-Dimensional Descriptive Geometry”, Rudgers — The State University, 1964c.
- “Lectures 1 and 2 on 4-D Geometry”, Dept. Graphics and Eng. Drawing, Princeton University, 1964d.
- “Four-Dimensional Descriptive Geometry, Symmetry-Descriptive Solution”, Special Report No. 1, Dept. Graphics and Eng. Drawing, Princeton University, 1965a.
- “Four-Dimensional Descriptive Geometry; Regular Pentatope-Orthographic Projections”, Special Report No. 2, Dept. Graphics and Eng. Drawing, Princeton University, 1965b.
- “Four-Dimensional Descriptive Geometry; Rotation”, Special Report No. 3, Dept. of Graphics and Eng. Drawing, Princeton University, 1965c.
- “Four-Dimensional Descriptive Geometry; Problems on 3-D Spaces”, Special Report N.º 4, Princeton University, 1965d.
- “Graphical Plotting of Data — An Application of Three and Four-Dimensional Theoretical Descriptive Geometry”, Special Report No. 5, Princeton University, 1965e.
- “Four-Dimensional Descriptive Geometry: Metric Problems — Angles, Descriptive Solution”, Special Report No. 6, Dept. of Graphics and Eng. Drawing, Princeton University, 1965f.
- “Four-Dimensional Descriptive Geometry: Proposition of a Problem”, Special Report No. 7, Dept. of Graphics and Eng. Drawing, Princeton University, 1965g.
- “Four-Dimensional Descriptive Geometry: Metric Problems: Distances”, Special Report No. 8, Dept. of Graphics and Eng. Drawing: Princeton University, 1965h.
- “Four-Dimensional Descriptive Geometry: Proposed Problems”, Special Report No. 9, Dept. of Graphics and Eng. Drawing, Princeton University, 1965i.
- LINDGREN, C. Ernesto S. e STEVE M. Slaby — *Four-Dimensional Descriptive Geometry*, New York: McGraw-Hill Book Co., 1968.